Canad. Math. Bull. Vol. **27** (1), 1984

SIMPLICITE DES GROUPES UNITAIRES DEFINIS PAR UN FACTEUR SIMPLE

PAR

THIERRY GIORDANO ET PIERRE DE LA HARPE

ABSTRACT. Let B be a σ-finite von Neumann factor of type II_1 or III and let σ be an involutory $*$-antiautomorphism of B. We consider $U(B)$ the unitary group of B and its subgroup $G=\{g\in U(B)\mid \sigma(g)=g^*\}$, which are unitary classical groups. In this paper, we prove that G has a unique nontrivial normal subgroup, which is its centre $\{\pm 1\}$.

Soient B une algèbre de von Neumann qui est un facteur et σ une $*$-transposition de B, c'est-à-dire un antiautomorphisme involutif de B tel que $\sigma(X^*)=\sigma(X)^*$ pour tout $X\in B$. Considérons le groupe unitaire

$$U(B)=\{X\in B\mid X^*X=XX^*=1\}$$

et son sous-groupe

$$G=\{g\in U(B)\mid \sigma(g)=g^*\}$$

qui sont des *groupes classiques unitaires* au sens de [6]. Le problème qui nous intéresse ici est la classification des *sous-groupes normaux* de G; nous renvoyons à [5] pour ceux de $U(B)$. Vour aussi [4] pour l'étude des σ possibles lorsque B est injectif. Pour ne pas alourdir la présentation, nous n'énonçons le résultat que lorsque B est algébriquement simple et de dimension infinie, ou (ce qui revient au même) lorsque B est soit de type II_1 soit de type III et de genre dénombrable.

THÉORÈME. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, G possède un unique sous-groupe normal non trivial qui est son centre* $\{\pm 1\}$.

La première partie de notre travail est consacrée à des préliminaires sur les systèmes d'unités matricielles. Nous montrons dans la seconde partie que tout sous-groupe normal non central de G contient les involutions de G, c'est-à-dire les éléments de carré 1. Le théorème résulte alors immédiatement du fait que G est engendré par ses involutions (théorème 1.6 de [10]).

Le premier auteur remercie le Fonds national suisse de la recherche scientifique qui a permis ce travail.

Received by the editors October 19, 1982 and in final revised form May 31, 1983.
AMS (1980) 46410.

Existence d'unites matricielles convenables. Soient B un facteur de type II_1 ou de type III et de genre dénombrable, et σ une *-transposition de B.

LEMME 1. *Soient E et F deux projecteurs équivalents de B invariants par σ. Il existe une isométrie partielle W de E vers F telle que $\sigma(W)=W^*$.*

Preuve. Soit V une isométrie partielle de E vers F. On vérifie par un calcul de routine que $X=V\sigma(V)$ est un unitaire de l'algèbre réduite B_F de B par F, et que $\sigma(X)=X$. Soit Y une racine carrée de X dans l'algèbre de von Neumann engendrée par X; alors $X=Y\sigma(Y)$. Posons $W=Y^*V$; on a bien

$$W^*W=V^*YY^*V=V^*FV=E$$
$$WW^*=Y^*VV^*Y=Y^*FY=F$$

Enfin, $\sigma(V)$ étant une isométrie partielle de projecteur final E et Y, $\sigma(Y)$ des unitaires de B_F, on a

$$\begin{aligned}\sigma(W)=\sigma(V)\sigma(Y^*)&=V^*(V\sigma(V))(\sigma(Y^*)Y^*)Y=V^*XX^*Y\\&=V^*FY=V^*Y=W^*\end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

LEMME 2. (a) *Supposons B fini et continu. Soient E un projecteur de B invariant par σ et d un nombre réel tel que $0\leqslant d\leqslant \dim(E)$. Alors il existe deux projecteurs orthogonaux E' et E'' de B invariants par σ de somme E avec $d=\dim(E')$.*

(b) *Supposons B purement infini et de genre dénombrable. Soit E un projecteur de B invariant par σ. Alors il existe deux projecteurs orthogonaux équivalents E' et E'' de B invariants par σ et de somme E.*

Preuve. Supposons B représentée comme algèbre d'opérateurs possédant un vecteur cyclique séparateur (n° 5.18 de [8]); les applications $X\mapsto X^*$ et σ sont alors faiblement continues (n° 5.25 de [8]). Notons

$$B^\sigma=\{X\in B \mid \sigma(X)=X^*\}$$
$$B^\sigma_{sa}=\{X\in B^\sigma \mid X^*=X\};$$

alors B^σ_{sa} est une *JW-algèbre*, c'est-à-dire une algèbre de Jordan réelle d'opérateurs auto-adjoints qui est faiblement fermée. On a $B^\sigma\cap iB^\sigma=\{0\}$ et l'identité

$$X=\tfrac{1}{2}(X+\sigma(X^*))+i\frac{1}{2i}(X-\sigma(X^*)) \qquad X\in B$$

montre que $B=B^\sigma\oplus iB^\sigma$; le centre de B^σ est donc la trace sur B^σ du centre de B, et B^σ_{sa} est un facteur réel.

Vérifions que le JW-facteur B^σ_{sa} n'est pas de type I (ce qui est un cas particulier facile du lemme 2.11 de [7]). Soit E un projecteur non nul de B^{σ}_{sa}; alors σ induit une *-transposition sur B_E que nous désignons encore par la même lettre, et il s'agit de vérifier que $EB^{\sigma}_{sa}E=(B_E)^{\sigma}_{sa}$ n'est pas abélien. Le facteur B_E est de dimension infinie et $B_E=(B_E)^{\sigma}\oplus i(B_E)^{\sigma}$, donc $(B_E)^{\sigma}$ est de dimension infinie. On montre comme ci-dessus que $(B_E)^{\sigma}_{sa}$ est un facteur. S'il est abélien, il est isomorphe à $\mathbb{R}$ et tout élément de $(B_E)^{\sigma}$ est de la forme $X=\lambda+Y$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\sigma(Y)=Y^*=-Y$; il en résulte que

$$XX^*=X^*X=\lambda^2-Y^2\in(B_E)^{\sigma}_{sa}\approx\mathbb{R},$$

donc que l'algèbre de Banach réelle $(B_E)^{\sigma}$ est une algèbre de division, donc qu'elle est de dimension finie (au plus 4—voir par exemple le paragraphe 14 de [1]); ceci est absurde, donc $(B_E)^{\sigma}_{sa}$ n'est pas abélien.

L'assertion (b) résulte donc du fait que tout projecteur dans une JW-algèbre continue est somme de deux projecteurs orthogonaux équivalents (théorème 17 de [9]). L'assertion (a) résulte du même fait appliqué plusieurs fois et d'un argument standard portant sur le développement $d=\sum_{n=1}^{\infty}d_n2^{-n}$ avec $d_n\in\{0,1\}$ pour tout $n\in\{1,2,\ldots\}$. ■

On désigne par G le groupe défini dans l'introduction et par $\mathrm{Sp}\,(X)$ le spectre d'un élément X de B.

LEMME 3. *Soit $g\in G$ un élément $\neq\pm1$ et dont le spectre n'est pas réduit à deux points. Il existe un système d'unités matricielles $(E_{i,j})_{1\le i,j\le 3}$ dans B avec les propriétés suivantes*:

$$\sigma(E_{i,j})=E_{j,i}\qquad(1\le i,j\le 3)$$
$$g=g_1+g_2+g_3\quad \textit{où}\quad g_i=E_{i,i}gE_{i,i}\qquad(1\le i\le 3)$$
$$\mathrm{Sp}\,(g_1)\neq\mathrm{Sp}\,(g_3).$$

Preuve. Comme $\sigma(g)=g^*$, on a $\mathrm{Sp}\,(g)=\overline{\mathrm{Sp}\,(g)}$; de plus, si $E(.)$ est la mesure spectrale associée à la décomposition $g=\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(it)\,dE_t$, alors $\sigma(E(\beta))=E(-\beta)$ pour tout borélien β de $]-\pi,\pi]$ et $E(\{\pi\})$ est un projecteur σ-invariant.

Considérons le cas où B est de type II_1. Soient

$$t_1=\inf\{t\in[0,\pi[\mid \dim E([-t,t])\ge 1/3\}$$

et

$$F=E([-t_1,t_1])-E(]-t_1,t_1[).$$

Le lemme 2(a) montre qu'il existe un sous-projecteur F' de F invariant par σ tel que $E(]-t_1,t_1[)+F'$ soit de dimension 1/3; posons $E_{1,1}=E(]-t_1,t_1[)+F'$. Le projecteur $E_{1,1}$ est invariant par σ, il commute à g et

$$\mathrm{Sp}\,(gE_{1,1})=\mathrm{Sp}\,(g)\cap\{e^{it}\in\mathbb{C}\mid t\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad |t|\le t_1\}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1984-013-6 Published online by Cambridge University Press

On construit de même deux projecteurs $E_{2,2}$ et $E_{3,3}$ de dimension 1/3, invariants par σ, qui commutent à g, et tels que

$$\mathrm{Sp}\,(gE_{2,2}) \subset \mathrm{Sp}\,(g) \cap \{e^{it} \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t_1 \leq |t| \leq t_2\}$$
$$\mathrm{Sp}\,(gE_{3,3}) \subset \mathrm{Sp}\,(g) \cap \{e^{it} \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t_2 \leq |t| \leq \pi\}$$

où

$$t_2 = \inf\{t \in [0, \pi] \mid \dim E([-t, t]) \geq 2/3\}.$$

($E_{2,2}$ est obtenu, par exemple, en appliquant l'argument ci-dessus à $M_{1-E_{1,1}}$ et $E_{3,3} = 1-(E_{1,1}+E_{2,2})$.)

On obtient ainsi une partition de l'unité $\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}\}$ de B; elle peut être complétée en un système d'unités matricielles ayant les propriétés désirées en vertu du lemme 1.

Considérons le cas (plus simple) où B est de type III. Il suffit de poser

$$t_1 = \inf\{t \in [0, \pi[\mid E([-t, t]) \neq 0\}$$

et $E_{1,1} = E([-t_1, t_1])$. Soit

$$t_2 = \inf\{t \in]t_1, \pi] \mid E(]t_1, t]) \neq 0\};$$

si $E(]t_2, \pi]) \neq 0$ on pose $E_{2,2} = E([-t_2, -t_1[\cup]t_1, t_2])$ et $E_{3,3} = 1-(E_{1,1}+E_{2,2})$; sinon on fragmente grâce au lemme 2(b) le projecteur $E(]-\pi, -t_1[\cup]t_1, \pi])$ en deux projecteurs σ-invariants équivalents $E_{2,2}$ et $E_{3,3}$. On complète comme plus haut la partition $\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}\}$ en un système d'unités matricielles. ■

On considère de plus un sous-groupe normal non central Γ de G.

PROPOSITION 4. *Soit g un élément de Γ, dont le spectre contient au moins trois points. Il existe, alors, un élément h de Γ et un système d'unités matricielles $(E_{i,j})_{i \leq i,j \leq 3}$ dans B avec les propriétés suivantes*:

$$\sigma(E_{i,j}) = E_{j,i} \qquad (1 \leq i, j \leq 3)$$
$$h = h_1 + h_2 + h_3 \quad \textit{où} \quad h_i = E_{i,i}hE_{i,i} \qquad (1 \leq i \leq 3)$$
$$h_1 \neq E_{1,1} \qquad h_2 = E_{2,2} \qquad h_3 = E_{3,1}h_1^*E_{1,3}.$$

Preuve. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ un système d'unités matricielles dans B, obtenu par le lemme 3, appliqué à g. L'élément $k = E_{1,3}+E_{2,2}+E_{3,1}$ est dans G, donc $h = gkg^*k^* \in \Gamma$. On vérifie sans peine que h a les propriétés désirées. ■

Existence d'involutions dans Γ. Soient B, σ et G comme dans le théorème de l'introduction. Commençons ce paragraphe par un lemme technique:

LEMME 5. *Soient E et F deux projecteurs équivalents de B tels que $\sigma(E) = F$. Il existe, alors, une isométrie partielle W de E vers F telle que $\sigma(W) = -W$.*

Preuve. Comme B est proprement infini, il existe deux projecteurs E_1 et E_2,

https://doi.org/10.4153/CMB-1984-013-6 Published online by Cambridge University Press

orthogonaux et équivalents, tels que $E=E_1+E_2$. Alors, $F_1=\sigma(E_1)$ et $F_2=\sigma(E_2)$ sont deux projecteurs orthogonaux, équivalents de somme F.

Soit U une isométrie partielle de B de E_1 vers F_2. On vérifie aisément que $W=U-\sigma(U)$ satisfait les conclusions du lemme. ■

Soient Γ un sous-groupe normal non central de G et un élément $g\in\Gamma$, $g\neq\pm1$.

LEMME 6. *Si le spectre de* g *est réduit à deux points, alors* Γ *contient une involution non triviale.* (*c'est-à-dire un élément de carré* 1 *qui n'est ni* $+1$, *ni* -1).

Preuve. Soit $M_4(\mathbb{C})$ le facteur de dimension 16 et τ la transposition usuelle de $M_4(\mathbb{C})$. Introduisons la matrice

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et l'antiautomorphisme involutif $\tilde{\sigma}=\operatorname{Ad} J\circ\tau$ de $M_4(\mathbb{C})$. Rappelons que le groupe symplectique

$$\mathrm{Sp}\,(2)=\{x\in M_4(\mathbb{C})\mid x^*=x^{-1}\quad\text{et}\quad\tilde{\sigma}(x)=x^*\}$$

possède un unique sous-groupe normal non trivial qui est son centre, et que Sp (2) possède des involutions non triviales (contrairement à $\mathrm{Sp}\,(1)\approx\mathrm{SU}\,(2)$).

Si g, comme dans l'énoncé du lemme, n'est pas une involution, il existe un projecteur E de B avec $\sigma(E)=1-E$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ avec $|\lambda|=1$, $\lambda\neq\pm1$ tels que $g=\lambda E+\bar{\lambda}(1-E)$. Soient $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$ deux projecteurs orthogonaux équivalents de somme E; choisissons une isométrie partielle $E_{1,2}$ de $E_{2,2}$ vers $E_{1,1}$ et notons $E_{2,1}=(E_{1,2})^*$. Posons ensuite:

$$E_{3,3}=\sigma(E_{1,1})\qquad E_{3,4}=\sigma(E_{2,1})$$
$$E_{4,3}=\sigma(E_{1,2})\qquad E_{4,4}=\sigma(E_{2,2});$$

alors, $E_{3,3}$, $E_{4,4}$ sont des projecteurs orthogonaux équivalents de somme 1-E, et $E_{3,4}$ est une isométrie partielle de $E_{4,4}$ vers $E_{3,3}$ d'adjoint $E_{4,3}$.

Il existe, par le lemme 5, une isométrie partielle $E_{3,1}$ de $E_{1,1}$ vers $E_{3,3}=\sigma(E_{1,1})$ avec $\sigma(E_{3,1})=-E_{3,1}$. On vérifie facilement que $E_{4,1}=E_{4,3}E_{3,1}$ [resp. $E_{3,2}=E_{3,1}E_{1,2}$, $E_{4,2}=E_{4,3}E_{3,1}E_{1,2}$] est une isométrie partielle de $E_{1,1}$ vers $E_{4,4}$ [resp. $E_{2,2}$ vers $E_{3,3}$, $E_{2,2}$ vers $E_{4,4}$] et que

$$\sigma(E_{4,1})=-E_{3,2},\qquad\sigma(E_{3,2})=-E_{4,1},\qquad\sigma(E_{4,2})=-E_{4,2}.$$

On obtient ainsi un système d'unités matricielles $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq 4}$ dans B et par suite une injection $\varphi: M_4(\mathbb{C})\to B$. On vérifie par des calculs élémentaires que

$\varphi \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi$, donc que φ fournit par restriction un homomorphisme injectif

$$\mathrm{Sp}\,(2) \to G$$

encore noté φ.

On a par construction:

$$\varphi \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \lambda E + \bar{\lambda}(1-E) = g \in \Gamma$$

Le sous-groupe normal $\varphi^{-1}(\Gamma)$ de $\mathrm{Sp}\,(2)$ n'est donc pas central. Il en résulte que $\varphi^{-1}(\Gamma) = \mathrm{Sp}\,(2)$ contient une involution non triviale, et par suite Γ aussi. ■

Si le spectre de $g \in \Gamma$ contient au moins trois points, nous pouvons alors considérer un élément $h = h_1 + h_2 + h_3 \in \Gamma$, comme à la proposition 4.

Notons A l'algèbre de von Neumann engendrée par h_1, qui est abélienne. Il existe une mesure borélienne régulière positive ν sur le spectre Ω de h_1 telle qu'on puisse identifier $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \nu)$ et A (théorème 4.7.1 de [2]). Pour $n \in \{2, 3\}$, nous identifions aussi l'algèbre des applications mesurables ν-essentiellement bornées (modulo la relation d'égalité ν-presque partout) de Ω dans l'algèbre matricielle $M_n(\mathbb{C})$ au produit tensoriel $A \otimes M_n(\mathbb{C})$. Alors,

$$\Psi \begin{cases} A \otimes M_3(\mathbb{C}) \longrightarrow B \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{l} aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{1,3} \\ + E_{2,1}d + E_{2,1}eE_{1,2} + E_{2,1}fE_{1,3} \\ + E_{3,1}g + E_{3,1}hE_{1,2} + E_{3,1}jE_{1,3} \end{array} \end{cases}$$

est un isomorphisme normal de $A \otimes M_3(\mathbb{C})$ sur une sous-algèbre de B. On a $\bar{\Omega} = \Omega$; comme $\sigma(h_1) = h_1^*$, la restriction s de σ à $A = L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \nu)$ est l'isomorphisme de composition avec la conjugaison complexe.

Notons s_3 la *-transposition de $A \otimes M_3(\mathbb{C})$ qui est produit tensoriel de s avec la transposition usuelle de $M_3(\mathbb{C})$; alors

$$\Psi \circ s_3 = \sigma \circ \Psi.$$

Pour $n \in \{2, 3\}$, le groupe $\mathrm{SU}\,(n, \Omega)$ des applications mesurables (modulo la relation d'égalité ν-presque partout) de Ω dans le groupe compact $\mathrm{SU}\,(n)$ est un sous-groupe de groupe unitaire de $A \otimes M_n(\mathbb{C}) = L^\infty_{M_n(\mathbb{C})}(\Omega, \nu)$; considérons aussi

$$\mathrm{SU}\,(3, \Omega)^s = \{\gamma \in \mathrm{SU}\,(3, \Omega) \mid \gamma(\bar{\omega}) = \overline{\gamma(\omega)} \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \Omega\}.$$

Alors Ψ définit un homorphisme injectif de ce groupe dans G (car $\gamma^* = s_3(\gamma)$, donc $\Psi(\gamma)^* = \sigma \circ \Psi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathrm{SU}\,(3, \Omega)^s$), et

$$\Gamma(\Omega) = \{\gamma \in \mathrm{SU}\,(3, \Omega)^s \mid \Psi(\gamma) \in \Gamma\}$$

est un sous-groupe normal de $SU(3, \Omega)^s$ contenant l'élément

$$h_\Omega = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h_1^* \end{pmatrix} \neq 1.$$

LEMME 7. *Il existe $k \in \Gamma$ et deux projections non nulles σ-invariantes orthogonales X, Y dans B tels que $kX = X$ et $kY = -Y$.*

Preuve. Si -1 est valeur propre de h_1, il suffit de choisir $k = h$, $X = E_{2,2}$ et Y le projecteur spectral de h associé à la valeur propre -1.

Si -1 n'est pas valeur propre de h_1, alors

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \operatorname{Im}(\omega) > 0\}$$
$$\Omega'' = \{\omega \in \Omega \mid \operatorname{Im}(\omega) < 0\}$$

sont deux boréliens non ν-négligeables de Ω échangés par la conjugaison complexe. Décrivons un isomorphisme φ de $SU(2, \Omega')$ sur un sous-groupe de $SU(3, \Omega)^s$; si

$$\gamma' \begin{cases} \Omega' \longrightarrow SU(2) \\ \omega \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(\omega) & \beta(\omega) \\ \delta(\omega) & \varepsilon(\omega) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est dans $SU(2, \Omega')$, alors $\varphi(\gamma') : \Omega \to SU(3)$ applique

$$\omega \in \Omega' \quad \text{sur} \quad \begin{pmatrix} \alpha(\omega) & 0 & \beta(\omega) \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta(\omega) & 0 & \varepsilon(\omega) \end{pmatrix}, \qquad \omega \in \Omega'' \quad \text{sur} \quad \begin{pmatrix} \overline{\alpha(\bar\omega)} & 0 & \overline{\beta(\bar\omega)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \overline{\delta(\bar\omega)} & 0 & \overline{\varepsilon(\bar\omega)} \end{pmatrix}$$

et $\omega \in \Omega \cap \{\pm 1\}$ sur 1. Considérons alors dans $SU(2, \Omega')$ l'élément

$$h_{\Omega'} \begin{cases} \Omega' \longrightarrow SU(2) \\ \omega \mapsto \begin{pmatrix} h_1(\omega) & 0 \\ 0 & \overline{h_1(\omega)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar\omega \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a $\varphi(h_{\Omega'}) = h_\Omega$ et

$$\Gamma(\Omega') = \{\gamma' \in SU(2, \Omega') \mid \varphi(\gamma') \in \Gamma(\Omega)\}$$

est un sous-groupe normal non trivial de $SU(2, \Omega')$. Soit ν', la restriction de ν à Ω'. Il existe donc $k_{\Omega'} \in \Gamma(\Omega')$ et une projection non nulle $Y' \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega', \nu') \otimes M_2(\mathbb{C})$ avec $k_{\Omega'} Y' = -Y'$ (voir le lemme 3 de [5]). On en déduit qu'il existe $k = (\Psi \circ \varphi)(k_{\Omega'}) \in \Gamma$ et une projection non nulle $Y \in B$ avec $Y \leq E_{1,1} + E_{3,3}$, $\sigma(Y) = Y$ et $kY = -Y$. On achève la démonstration en posant $X = E_{2,2}$. ■

PROPOSITION 8. *Soit Γ un sous-groupe normal non central de G. Alors Γ contient une involution non triviale de G.*

Preuve. Soit $g \in \Gamma$, $g \neq \pm 1$. Si le spectre de g est réduit à deux points, le lemme 6 démontre la proposition. Sinon, par le lemme 7, il existe $k \in \Gamma$ et deux projections E et F non nulles, orthogonales, équivalentes et σ-invariantes de B tels que $kE = E$ et $kF = -F$. Par le lemme 1, il existe une isométrie partielle W de E vers F telle que $\sigma(W) = W^*$. Posons $h = W + W^* + (1 - E - F)$. C'est un élément de G et donc $hkh^*k^* \in \Gamma$. Par construction,

$$hkh^*k^* = -(E+F) + (1-E-F)$$

est une involution. ■

PROPOSITION 9. *Soit Γ un sous-groupe normal non central de G. Alors Γ contient toutes les involutions de G.*

Preuve. Une involution de G est de la forme $1-2E$ avec E un projecteur σ-invariant de B. Si B est un facteur de type III, deux projecteurs non triviaux de B sont unitairement équivalents; il résulte donc du lemme 1 que deux involutions non triviales de G sont conjuguées dans G; l'assertion est donc une conséquence immédiate de la proposition 8. A des modifications de détail près, cet argument démontre aussi l'assertion dans le cas du type II_1 (voir le lemme 6 de [5]). ■

Pour que $U(B_1)$ et $U(B_2)$ soient isomorphes, on sait qu'il faut et qu'il suffit que B_1 et B_2 soient ou bien isomorphes ou bien anti-isomorphes [3]. Soient B_1, B_2 deux facteurs, σ_1, σ_2 deux *-transpositions de B_1 et respectivement B_2, et G_1, G_2 les deux groupes classiques unitaires associés; si G_1 et G_2 sont isomorphes, existe-t-il toujours un *-(anti-)isomorphisme

$$\theta : B_1 \to B_2 \quad \text{tel que} \quad \sigma_2 = \theta \circ \sigma_1 \circ \theta^{-1}?$$

Apportons pour terminer quelques remarques et corrections de détail à [5]. Dans l'énoncé du lemme 4, il faut lire $kY = -Y$ au lieu de $kY - Y$. Au milieu de la page 341, il faut lire "generated by h_2" au lieu de "by h" et "$W^*c + W^*dW$" au lieu de "$cW^* + dP_3$". Les arguments de [5] tels qu'ils y sont rédigés s'appliquent sans changement aux AW^*-algèbres; si l'on ne s'intéresse (comme ici) qu'aux algèbres de von Neumann, on peut les alléger en adoptant le point de vue des fonctions mesurables au lieu de celui des fonctions continues.

REFERENCES

1. F. F. Bonsall et J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg 1973.

2. R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Academic Press, New York 1972.

3. H. A. Dye, *On the geometry of projections in certain operator algebras*, Ann. of Math. **61** (1955) 73–89.

4. T. Giordano, *Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs*, thèse, Neuchâtel, 1981; voir aussi C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **291** (1980) 583–585.

5. P. de la Harpe, *Simplicity of the projective unitary groups defined by simple factors*, Comment. Math. Helv. **54** (1979) 334–345.

6. ——, *Classical groups and classical Lie algebras of operators*, Operator Algebras and Applications. Proc. in Pure Math., Amer. Math. Soc. Vol. 38, part. I, pages 477–513.

7. E. Størmer, *On anti-automorphisms of von Neumann algebras*, Pacific J. Math. **21** (1967) 349–370.

8. S. Stratila et L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras*, Abacus Press, Kent 1979.

9. D. M. Topping, *Jordan algebras of self-adjoint operators*, Mem. Amer. Math. Soc. **53,** A.M.S. Providence R. I. 1965.

10. H. Upmeier, *Automorphism groups of Jordan C^*-algebras*, Math. Z. **176** (1981) 21–34.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
CH-2000 NEUCHÂTEL

Adresse actuelle:
DEPT. OF MATHEMATICS AND STATISTICS
QUEEN'S UNIVERSITY
KINGSTON (ONT.) K7L 3N6.

SECTION DE MATHÉMATIQUES
C.P. 124
CH-1211 GENÈVE 24