Canad. Math. Bull. Vol. **18** (3), 1975

CARACTERISATION DES ESPACES PARFAITS

PAR
RAYMOND LEBLANC

Dans cette note, nous employons la terminologie et les définitions de [1] et [3].

A un sous-espace vectoriel W d'un espace vectoriel V pré-ordonné par un cône convexe pointé V^+ avec élément unité e, nous associons la semi-norme suivante: pour $x \in V$, $p_W(x)=\inf\{\varepsilon>0 \mid \exists \omega_\varepsilon \in W$ tel que $-\omega_\varepsilon-\varepsilon e \leq x \leq \omega_\varepsilon+\varepsilon e\}$. Posons $J(W)=\{x \mid p_W(x)=0\}=\{x \in V \mid \forall \varepsilon>0, \exists \omega_\varepsilon \in W, -\omega_\varepsilon-\varepsilon e \leq x \leq \omega_\varepsilon+\varepsilon e\}$. $J(W)$ est un idéal. Nous dirons qu'on sous-espace W d'un espace vectoriel pré-ordonné V avec élément unité e est parfait si pour tout $x \in W$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\omega_\varepsilon \in W$ tel que $-\omega_\varepsilon-\varepsilon e \leq x \leq \omega_\varepsilon+\varepsilon e$. Clairement W est un espace parfait $\Leftrightarrow W \subseteq J(W)$.

THEOREME 1. *Si W est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel ordonné V avec élément unité e, alors $W \subseteq J(W) \Leftrightarrow W^\perp$ est un idéal dans V'.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $f \in W^\perp$ et $-f \leq g \leq f$, alors $f+g \geq 0$ et $f-g \geq 0$. Pour $x \in W$, on a $\forall \varepsilon>0$, $\exists \omega_\varepsilon \in W$ tel que $-\omega_\varepsilon-\varepsilon e \leq x \leq \omega_\varepsilon+\varepsilon e$. Si on évalue $f+g$ et $f-g$ en ces points, on obtient les inégalités

$$-\varepsilon(f(e)+g(e))-g(\omega_\varepsilon) \leq g(x) \leq \varepsilon(f(e)+g(e))+g(\omega_\varepsilon) \text{ et}$$
$$-\varepsilon(f(e)-g(e))+g(\omega_\varepsilon) \leq -g(x) \leq -\varepsilon(f(e)-g(e))-g(\omega_\varepsilon)$$

d'où l'on tire $-\varepsilon f(e) \leq g(x) \leq \varepsilon f(e)$, ε étant arbitraire, on conclut que $g(x)=0$, c'est-à-dire $g \in W^\perp$.

($\Leftarrow$) Puisque $W \nsubseteq J(W)$, on a $p_W(x) \not\equiv 0$ sur W. Ainsi, il existe $\omega \in W$ tel que $p_W(\omega) \neq 0$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle linéaire $\phi: W \to R$ telle que pour tout $x \in W$, $|\phi(x)| \leq p_W(x)$ et $\phi \not\equiv 0$ sur W. De plus, pour $x \in [-e, e]$ un ensemble radial et $x \in W$ on a $-(-x+2e) \leq x \leq -x+2e$ d'où $p_W(x) \leq 2$. On peut donc prolonger les fonctionnelles linéaires ϕ et $-\phi$ à deux fonctionnelles linéaires positives f et g définies sur V. (Peressini [4], p. 82). Or, pour tout $x \in W$, $f(x)+g(x)=\phi(x)-\phi(x)=0$. Donc $f+g \in W^\perp$. De plus, il est clair que $f \notin W^\perp$ et $g \notin W^\perp$ et $-(f+g) \leq f \leq f+g$. Donc $W^\perp$ n'est pas un idéal dans V'.

COROLLAIRE 2. (*Théorème de Ellis* [3]). *Un idéal I dans un espace vectoriel ordonné V avec élément unité e est parfait si et seulement si $I^\perp$ est un idéal dans V'.*

Le lemme suivant nous permettra d'obtenir la caractérisation de Bonsall pour les idéaux maximaux parfaits comme corollaire du théorème 1.

LEMME 3. *Dans un espace vectoriel pré-ordonné V, si W est le noyau d'une* *fonctionnelle positive non nulle f, alors $W^{\perp}$ est un ideal$\Leftrightarrow f$ est sur une génératrice extrémale.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Il est clair que $f \in W^{\perp}$. Supposons que $f=f_1+f_2$, $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$, alors $-f \leq f_1 \leq f$, $-f \leq f_2 \leq f$, d'où $f_1, f_2 \in W^{\perp}$. Ainsi, $f=f_1=f_2$ sur W et alors $f_1=\lambda_1 f$, $f_2=\lambda_2 f$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Donc f est extrémale.

($\Leftarrow$) Supposons f extrémale et considérons $g \in W$, $g \not\equiv 0$. Dans ce cas puisque W est de codim 1, f et g ont le même noyau et ainsi $g=\lambda f$, $\lambda>0$. Puisqu'il en est ainsi, il suffit de vérifier que $-f \leq h \leq f \Rightarrow h \in W^{\perp}$. Or, si $-f \leq h \leq f$, on a $f+h \geq 0$ et $f-h \geq 0$ et $f=(f+h)/2+(f-h)/2$. Puisque f est extrémale, on en conclut que $h=\alpha f$, $\alpha>0$ et alors $h \in W^{\perp}$.

COROLLAIRE 4. (*Théorème de Bonsall* [1]). *Dans un espace vectoriel ordonné (avec unité), un idéal maximal W est parfait si et seulement si toute fonctionnelle positive f associée* à *W appartient* à *une génératrice extrémale.*

Preuve. En vertu du lemme 3, on a f est extrémale $\Leftrightarrow W^{\perp}$ est un idéal et par le théorème 1, $W^{\perp}$ est un idéal $\Leftrightarrow W \subseteq J(W)$ d'où f est extrémale $\Leftrightarrow W$ est un idéal maximal parfait.

Je tiens à exprimer mes remerciements à M. Serge Dubuc pour ses nombreuses suggestions et ses commentaires judicieux.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. F. BONSALL, *Extreme Maximal Ideals of a Partially Ordered Vector Space*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 831–837.

2. S. Dubuc, *Fonctionnelles linéaires positives extrémales*, C.R. Acad. Sci. Paris. t 270 (1970) 1502–1504.

3. A. J. Ellis, *The Duality of Partially Ordered Normed Spaces*, Journal London Math. Soc. **39** (1964), 730–744.

4. A. L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper and Row (1967).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES