SUR LA REPRESENTATION INTEGRALE DES CERTAINES OPERATIONS LINEAIRES. IV OPERATIONS LINEAIRES SUR L'ESPACE $L_{\mathfrak{a}}^{p}$

N. DINCULEANU ET C. FOIAS

1. Introduction. La première partie de cet article a un caractère introductif; on reprend l'étude des mesures vectorielles sur un espace localement compact, présenté dans **(8)** pour les espaces compacts.

Dans la seconde partie on donne un théorème de représentation intégrale d'une mesure vectorielle par rapport à sa variation (théorème 2), duquel on déduit une généralisation du théorème de Lebesgue–Nikodym (théorème 3) et une généralisation du théorème de Lebesgue sur la décomposition d'une mesure (théorème 5). Ces théorèmes ont été déjà démontrés par les auteurs sous des conditions un peu plus restrictives, **(10)** et **(13)**, mais ici les démonstrations sont nouvelles, et l'ordre dont on les déduit l'un de l'autre, est inversée.

Du théorème 2 on déduit aussi un théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire de l'espace $L_{\mathfrak{a}}^{p}(\nu)$ dans un espace de Banach puisse être représentée sous une forme intégrale (théorème 6). De ce théorème, qui nous semble nouveau, on déduit le théorème de C. T. Ionescu Tulcea **(15)** concernant les fonctionnelles linéaires et continues sur l'espace $L_{\mathfrak{a}}^{p}(\nu)$ et un thèoréme concernant les applications linéaires et continues de l'espace $L_{\mathfrak{a}}^{1}(\nu)$ dans un espace de Banach, donné par l'un des auteurs dans **(6)**.

I. Mesures vectorielles

1. Préliminaires. Soient T un espace localement compact et $\mathfrak{B}$ le clan des parties boréliennes relativement compactes de T. Soient $\mathfrak{E} = (E(t))_{t\in T}$ une famille d'espaces de Banach et X un espace de Banach.

Désignons par $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ l'ensemble des champs de vecteurs $\mathbf{x}$ définis sur T, tels que $\mathbf{x}(t) \in E(t)$ quel que soit $t \in T$. La norme d'un élément a appartenant à l'un des espaces $E(t)$ ou X sera notée par $|a|$. Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$, on désigne par $|\mathbf{x}|$ la fonction numérique $t \to |\mathbf{x}(t)|$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ et tout $A \subset T$ on pose

$$||\mathbf{x}||_A = \sup_{t\in A} |\mathbf{x}(t)|$$

et $||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||_T$.

Reçu le 17 novembre, 1959.

Supposons qu'il existe une famille fondamentale[1] $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ de champs de vecteurs continus.

Un champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ est continu (part rapport à $\mathfrak{a}$) au point $t_0 \in T$, si pour tout nombre $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de t_0 et un champ de vecteurs $\mathbf{y} \in \mathfrak{a}$, tels que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqslant \epsilon$$

pour $t \in V$.

Si un champ de vecteurs $\mathbf{x}$ est continu au point t_0, alors la fonction numérique $|\mathbf{x}|$ est continue en t_0.

Lorsque tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un espace de Banach E, on prend pour $\mathfrak{a}$ l'ensemble des applications constantes de T dans E, et on identifie $\mathfrak{a}$ avec E. Dans ce cas la continuité par rapport à $\mathfrak{a}$ est la continuité habituelle.

Dans ce qui suit, (à l'exception du théorème 6), on supposera que $\mathfrak{a}$ vérifie l'axiome suivant:

(i) *Quels que soient* $A, B \in \mathfrak{B}$, $A \subset B$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ *et* $\epsilon > 0$, *il existe* $\mathbf{y} \in \mathfrak{a}$ *tel que* $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$ *et* $||\mathbf{y}||_B \leqslant ||\mathbf{x}||_A + \epsilon$.

Dans le cas où $E(t) = E$ quel que soit $t \in T$, l'axiome (i) est vérifiée.

Pour tout $A \in \mathfrak{B}$, la fonction $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||_A$ est une séminorme sur $\mathfrak{a}$ Si $A \subset B$, alors $||\mathbf{x}||_A \leqslant ||\mathbf{x}||_B$. Pour tout $A \in \mathfrak{B}$, on désigne par $\mathfrak{a}_A$ l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur A, définie par la séminorme $||\mathbf{x}||_A$, est par $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}_A, X)$, l'espace de Banach des applications linéaires et continues de $\mathfrak{a}_A$ dans X, munit de la topologie définie par la norme

$$||U||_A = \sup_{||\mathbf{x}||_A \leqslant 1} |U\mathbf{x}|.$$

Si $A \subset B$, alors $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}_A, X) \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_B, X)$ et $||U||_A \geqslant ||U||_B$.

Lorsqu'on écrit $\mathfrak{a}$, on entend que $\mathfrak{a}$ est muni de la topologie d'espace localement convexe séparé définie par la famille des séminormes $(||\mathbf{x}||_A)_{A \in \mathfrak{B}}$; $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, X)$ est alors l'espace des applications linéaires et continues de $\mathfrak{a}$ dans X. On a

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, X) = \bigcup_{A \in \mathfrak{B}} L(\mathfrak{a}_A, X).$$

2. Mesures vectorielles. On appelle *fonction vectorielle d'ensemble*, toute application $\mathbf{m}$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, X)$, vérifiant l'axiome suivant:

(j) *pour tout* $A \in \mathfrak{B}$ *et* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}$ *tels que* $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$, *on a*

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\mathbf{y}.$$

Si $E(t) = E$ quel que soit $t \in T$, la condition (j) est superflue.

[1]Une famille fondamentale de champs de vecteurs continus $\mathfrak{a}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ tel que: la fonction numérique $t \to |\mathbf{x}(t)|$ soit continue quel que soit $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$, et l'ensemble $\{\mathbf{x}(t) | \mathbf{x} \in \mathfrak{A}\}$ soit dense dans $E(t)$ quel que soit $t \in T$. En ce qui concerne les champs de vecteurs, voir **(14)**.

PROPOSITION 1. *Si* $\mathbf{m}$ *est une fonction vectorielle d'ensemble, pour tout* $A \in \mathfrak{B}$ *on a* $\mathbf{m}(A) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_A, X)$ *et*

$$||\mathbf{m}(A)||_A = ||\mathbf{m}(A)||_B$$

quel que soit $B \in \mathfrak{B}$ *tel que* $A \subset B$.

Soit $A \in \mathfrak{B}$; on a $\mathbf{m}(A) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}, X)$, donc il existe $C \in \mathfrak{B}$, tel que $||\mathbf{m}(A)||_C < +\infty$. Pour tout $B \in \mathfrak{B}$ tel que $A \subset B$ on a

$$||\mathbf{m}(A)||_B \leqslant ||\mathbf{m}(A)||_A.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, soient $\epsilon > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ tel que $||\mathbf{x}||_A \leqslant 1$. D'après l'axiome (i), il existe $\mathbf{y} \in \mathfrak{a}$, tel que $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$ et $||\mathbf{y}||_B \leqslant 1 + \epsilon$. D'après l'axiome (j) on a

$$|\mathbf{m}(A)\mathbf{x}| = |\mathbf{m}(A)\mathbf{y}| = (1+\epsilon)\left|\mathbf{m}(A)\frac{\mathbf{y}}{1+\epsilon}\right| \leqslant (1+\epsilon)\,||\mathbf{m}(A)||_B \leqslant +\infty$$

donc

$$||\mathbf{m}(A)||_A \leqslant (1+\epsilon)||\mathbf{m}(A)||_B$$

et comme ϵ est arbitraire, on déduit

$$||\mathbf{m}(A)||_A \leqslant ||\mathbf{m}(A)||_B.$$

En prenant $B \in \mathfrak{B}$ tel que $A \cup C \subset B$, on déduit

$$||\mathbf{m}(A)||_B \leqslant ||\mathbf{m}(A)||_C < +\infty$$

donc aussi $||\mathbf{m}(A)||_A < +\infty$, ce qui achève la démonstration.

Remarques. On écrira dans la suite $||\mathbf{m}(A)||$ au lieu de $||\mathbf{m}(A)||_A$. Si (A_n) est une suite d'ensembles de $\mathfrak{B}$, dont la réunion A_0 appartient à $\mathfrak{B}$, les normes $||\mathbf{m}(A_n)||$ seront calculés par rapport à un ensemble quelconque $B \in \mathfrak{B}$ tel que $A_0 \subset B$. Par exemple, la condition

$$\mathbf{m}(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_n)$$

signifie que la série est convergente dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}_B, X)$ et sa somme est $\mathbf{m}(A_0)$.

Définition 1. On appelle mesure vectorielle sur T, toute fonction vectorielle d'ensemble $\mathbf{m}$, telle que, pour toute suite (A_n) d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$, dont la réunion appartient à $\mathfrak{B}$, on ait

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_n).$$

On déduit que si $\mathbf{m}$ est une mesure vectorielle sur T, on a $\mathbf{m}(\phi) = 0$, et

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i)$$

pour toute famille finie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$.

Définition 2. On dit qu'une mesure vectorielle $\mathbf{m}$ sur T est régulière, si pour tout $A \in \mathfrak{B}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset A$ et un ensemble ouvert relativement compact $G \supset A$, tels que si $A' \in \mathfrak{B}$ et $K \subset A' \subset G$, on ait

$$||\mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(A')|| \leqslant \epsilon.$$

Remarques. D'après la définition 1, une fonction positive d'ensemble μ est une mesure positive, si μ est dénombrablement additive et $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$. Une mesure complexe régulière μ sera identifiée dans la suite avec la mesure de Radon $\int f d\mu$ qu'elle engendre.[2]

3. Variation d'une mesure vectorielle. Soit $\mathbf{m}$ une mesure vectorielle sur T. Pour tout $A \in \mathfrak{B}$ posons

$$\mu(A) = \sup \sum_i ||\mathbf{m}(A_i)||$$

le sup. étant considéré pour toutes les familles finies (A_i) d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$, dont la réunion est A.

La fonction d'ensemble μ sera appelée la *variation* de $\mathbf{m}$; elle a les propriétés suivantes:

1°. $0 \leqslant \mu(A) \leqslant +\infty$ pour $A \in \mathfrak{B}$;

2°. $\mu(A) = 0$ si et seulement si $\mathbf{m}(B) = 0$ pour tout $B \subset A$, $(A, B \in \mathfrak{B})$;

3°. $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ si $A \subset B$, $(A, B \in \mathfrak{B})$;

4°.
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

pour toute suite (A_n) d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$, dont la réunion appartient à $\mathfrak{B}$;

5°. $||\mathbf{m}(A)|| \leqslant \mu(A)$ pour $A \in \mathfrak{B}$.

La variation de $\mathbf{m}$ est *la plus petite* fonction positive d'ensemble, dénombrablement additive, vérifiant l'inégalité 5° pour tout $A \in \mathfrak{B}$.

On dit que $\mathbf{m}$ est à *variation finie* μ, si $\mu(A) < +\infty$ quel soit que $A \in \mathfrak{B}$.

PROPOSITION 2. *Une mesure vectorielle à variation finie est régulière si et seulement si sa variation est régulière.*

La démonstration est la même que pour le cas où T est compact **(8)**.

Remarque. Si $\mathbf{m}$ est une mesure régulière complexe, alors la variation μ de $\mathbf{m}$ est égale au module $|\mathbf{m}|$ de $\mathbf{m}$ (voir **(2)**).

4. Sémivariation d'une mesure vectorielle. Soit $\mathbf{m}$ une mesure vectorielle sur T. Pour tout $A \in \mathfrak{B}$, posons

$$\tilde{\mu}(A) = \sup \left| \sum_i \mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i \right|$$

[2]Pour ce qui concerne les mesures de Radon, voir **(2)**.

le sup. étant considéré pour toutes les familles finies $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$ dont la réunion est A, et toutes les familles finies $(\mathbf{x}_i)_{i\in I}$ de champs de vecteurs appartenant à $\mathfrak{a}$, tels que $\|\mathbf{x}_i\|_A \leqslant 1$. En vertu des axiomes (i) et (j), la condition $\|\mathbf{x}_i\|_A \leqslant 1$ peut être remplacée par la condition $\|\mathbf{x}_i\|_B \leqslant 1$, où B est un ensemble quelconque de $\mathfrak{B}$ contenant A.

La fonction d'ensemble $\tilde{\mu}$, s'appelle la *sémivariation* de $\mathbf{m}$; elle a les propriétés suivantes:

1°. $0 \leqslant \tilde{\mu}(A) \leqslant +\infty$ pour $A \in \mathfrak{B}$;

2°. $\tilde{\mu}(A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = 0$;

3°. $\tilde{\mu}(A) \leqslant \tilde{\mu}(B)$ si $A \subset B$, $(A, B \in \mathfrak{B})$;

4°. $\tilde{\mu}$ est dénombrablement sous-additive;

5°. $\|\mathbf{m}(A)\| \leqslant \tilde{\mu}(A) \leqslant \mu(A)$ pour $A \in \mathfrak{B}$.

PROPOSITION 3. *Si $X = C$, on a $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$.*

Soit $A \in \mathfrak{B}$. Il reste à montrer seulement que $\mu(A) \leqslant \tilde{\mu}(A)$. Pour ce faire, soient $\epsilon > 0$ et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$, dont la réunion est A. Pour chaque i, il existe $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{a}$ tel que $\|\mathbf{x}_i\|_A \leqslant 1$ et

$$\|\mathbf{m}(A_i)\| \leqslant \mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i + \frac{\epsilon}{n}.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{m}(A_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i + \epsilon \leqslant \tilde{\mu}(A) + \epsilon$$

donc

$$\mu(A) \leqslant \tilde{\mu}(A) + \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on déduit $\mu(A) \leqslant \tilde{\mu}(A)$ et ceci achève la démonstration.

5. Champs de vecteurs étagés. On dit qu'un champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ est $(\mathfrak{a}, \mathfrak{B})$-étagé, où, simplement, étagé, s'il est de la forme

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i \qquad (A_i \in \mathfrak{B}, \mathbf{x}_i \in \mathfrak{a}, 1 \leqslant i \leqslant n).$$

Désignons par $\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}(T)$, l'espace vectoriel des champs de vecteurs étagés, et par $\mathfrak{E}(T)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques étagées.

On peut toujours écrire un champ de vecteurs étagé

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i,$$

de telle manière que les ensembles A_i soient disjoints. Alors

$$|\mathbf{x}| = \sum_i \varphi_{A_i}|\mathbf{x}_i|$$

est une fonction numérique étagée.

Soit $\mathbf{m}$ une mesure vectorielle à variation finie μ.

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press

Pour tout champ de vecteurs étagé

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i,$$

on définit l'intégrale

$$\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}$$

de $\mathbf{x}$ par rapport à $\mathbf{m}$, par l'égalité

$$\int \mathbf{x} d\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i.$$

L'application

$$\mathbf{x} \to \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}$$

de $\mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$ dans X est linéaire.

PROPOSITION 4. *Pour tout champ de vecteurs* $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$ *on a*

$$\left|\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}\right| \leqslant \int |\mathbf{x}|\, d\mu.$$

Pour la démonstration voir **(8)**.

Désignons par $\mathfrak{B}'$ l'ensemble des parties $B \subset T$, telles que $A \cap B \in \mathfrak{B}$, quel que soit $A \in \mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}'$ est une tribu.

Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$ et $A \in \mathfrak{B}'$, alors $\varphi_A\mathbf{x} \in \mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$.

PROPOSITION 5. *Soit* $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$. *Pour toute suite* (A_n) *d'ensembles disjoints de* $\mathfrak{B}'$, *on a*

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} \mathbf{x}\, d\mathbf{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \mathbf{x}\, d\mathbf{m}.$$

6. Intégration des champs de vecteurs. Soit $\mathbf{m}$ une mesure vectorielle à variation finie μ. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$ posons

$$N_1(\mathbf{x}) = \int |\mathbf{x}|\, d\mu.$$

L'application $\mathbf{x} \to N_1(\mathbf{x})$ est une semi-norme sur $\mathfrak{C}_\mathfrak{a}(T)$; la topologie définie par cette semi-norme est la topologie de la convergence en moyenne.

Définition 3. On dit qu'un champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{C})$ est μ-intégrable, s'il existe une suite $(\mathbf{x}_n)$ de champs de vecteurs étagés, convergente vers $\mathbf{x}$ μ-presque partout et qui soit une suite de Cauchy pour la topologie de la convergence en moyenne.

Désignons par $L_\mathfrak{a}{}^1(\mu)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs μ-intégrables.

On déduit aussitôt que si $\mathbf{x}$ est un champ de vecteurs μ-intégrable, alors $|\mathbf{x}|$ est une fonction numérique μ-intégrable.

On considère sur $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ la topologie de la convergence en moyenne, définie par la sémi-norme

$$N_1(\mathbf{x}) = \int |\mathbf{x}| d\mu \qquad \text{pour} \quad \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mu).$$

On montre que $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ est un espace complet pour cette topologie, et l'espace $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a}}(T)$ est dense dans $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$.

Proposition 6. *Si* $(\mathbf{x}_n)$ *est une suite de chamsp de vecteurs de* $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$, *dont les supports sont contenus dans un même ensemble compact, et si la suite* $(\mathbf{x}_n)$ *est uniformément convergente vers un champs de vecteurs* $\mathbf{x}$, *alors* $\mathbf{x}$ *est* μ-*intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} N_1(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) = 0.$$

La démonstration est immédiate.

Définition 4. Un champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{C})$ est $\mathbf{m}$-intégrable si $\mathbf{x}$ est μ-intégrable.

De la proposition 4 on déduit que l'application $\mathbf{x} \to \int \mathbf{x} d\mathbf{m}$ de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a}}(T)$ dans X est continue pour la topologie de la convergence en moyenne. Comme $\mathfrak{C}_{\mathfrak{a}}(T)$ est dense dans $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ pour cette topologie et X est complet, l'application $\mathbf{x} \to \int \mathbf{x} d\mathbf{m}$ se prolonge uniquement, par continuité, à une application linéaire et continue de $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ dans X, notée toujours $\int \mathbf{x} d\mathbf{m}$. On a encore

$$\left| \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \right| \leqslant \int |\mathbf{x}|\, d\mu \qquad \text{pour} \quad \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mu).$$

Pour tout $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ on appelle $\int \mathbf{x} d\mathbf{m}$ l'intégrale de $\mathbf{x}$ par rapport à $\mathbf{m}$. On écrit aussi $L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$ au lieu de $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$.

On désigne par $\mathfrak{B}(\mathbf{m})$ ou $\mathfrak{B}(\mu)$ le clan des parties μ-mesurables et relativement compacts de T. Si $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{m})$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, alors $\varphi_A \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$. Pour tout $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{m})$ on définit $\mathbf{m}(A)$ par l'égalité

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \int \varphi_A \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \qquad \text{pour} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{a}.$$

On déduit aussitôt

(1) $\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\mathbf{y}$ si $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{m})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}$;

(2) $||\mathbf{m}(A)|| = \sup_{||\mathbf{x}||_B \leqslant 1} |\mathbf{m}(A)\mathbf{x}|$.

quel que soit $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{m})$ tel que $A \subset B$;

(3) $\mathbf{m}(A)$ est dénombrablement additive sur $\mathfrak{B}(\mathbf{m})$.

On désigne par $\mathfrak{B}'(\mathbf{m})$ ou $\mathfrak{B}'(\mu)$ la tribu des parties μ-mesurables de T; $\mathfrak{B}'(\mathbf{m})$ est donc l'ensemble des parties $B \subset T$ telles que $A \cap B \in \mathfrak{B}(\mathbf{m})$ quel que soit $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{m})$.

7. Mesures vectorielles régulières. Désignons par $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ continus (par rapport à $\mathfrak{a}$) et à support compact. Pour tout $A \subset T$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T, A)$ est le sous-espace de $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$ formé des champs de vecteurs dont les supports sont contenus dans A. Tout champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$ peut être approché uniformément par des champs de vecteurs de $\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}(T)$, donc $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T) \subset L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$.

PROPOSITION 7. *Si* $\mathbf{m}$ *est régulière et à variation finie, alors* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$ *est dense dans* $L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$.

En effet, la variation μ de $\mathbf{m}$ est une mesure positive régulière, et tout champ $\varphi_A\mathbf{x}$, $(A \in \mathfrak{B}, \mathbf{x} \in \mathfrak{a})$ peut être approché dans $L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ par des champs de $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$.

PROPOSITION 8. *Deux mesures vectorielles à variation finie et régulières* $\mathbf{m}$ *et* $\mathbf{m}'$ *sont égales, si et seulement si*

$$\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} = \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}' \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T).$$

La démonstration est la même que pour le cas où T est compact **(8)**.

On dit qu'une application linéaire U de $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$ dans X est *majorée*, s'il existe une mesure de Radon positive λ sur T, telle que

$$|U(\mathbf{x})| \leqslant \int |\mathbf{x}|\, d\lambda \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T).$$

Il existe alors **(7)** une plus petite mesure de Radon positive ν sur T, majorante de U.

Si $\mathbf{m}$ est une mesure vectorielle régulière et à variation finie μ, et si l'on pose

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$$

alors U est une application linéaire de $\mathfrak{K}_a(T)$ dans X, majorée par μ; en outre, μ est la plus petitite mesure positive régulière (qu'on a convenu à identifier à une mesure de Radon), majorante de U.

Réciproquement, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Pour toute application linéaire et majorée* U *de* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T)$ *dans* X, *ilexiste une mesure vectorielle régulière* $\mathbf{m}$ à *variation finie, et une seule, telle que*

$$U(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T).$$

En outre, la variation μ *de* $\mathbf{m}$ *est la plus petitite mesure positive majorante de* U, *et pour tout ensemble ouvert* $G \in \mathfrak{B}$, *on a* $||U_G|| = \tilde{\mu}(G)$, *où* U_G *est la restriction de* U *à l'espace* $\mathfrak{K}_{\mathfrak{a}}(T, G)$.

La démonstration est la même que pour le cas où T est compact **(8)**.

II. Représentation intégrale des opérations linéaires sur $L_{\mathfrak{a}}^p$

Dans la suite de cet article on supposera que:

(1) La famille fondamentale $\mathfrak{a}$ vérifie l'axiome (G), c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\mathbf{x}_n)$ de champs de vecteurs appartenant à $\mathfrak{a}$, telle que la suite $(\mathbf{x}_n(t))$ soit dense dans $E(t)$ quel que soit $t \in T$;

(2) X est le dual F' d'un espace de Banach F de type dénombrable.

Les mesures vectorielles seront donc considérées à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}, F')$.

Pour chaque $t \in T$, désignons par $G(t)$ l'espace $\mathfrak{L}(E(t), F')$ des applications linéaires et continues de $E(t)$ dans F', par $\mathfrak{G}$ la famille $(G(t))_{t\in T}$, et par $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ l'ensemble des champs d'opérations U définis sur T tels que $U(t) \in G(t)$ quel que soit $t \in T$.

1. Mesures vectorielles absolument continues par rapport à une mesure positive. On démontre d'abord le théorème suivant qui est fondamental pour ce qui suit.

Théorème 2. *Pour toute mesure vectorielle régulière* $\mathbf{m}$, *à variation finie* μ, *il existe un champ d'opérations* $U_{\mathbf{m}} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ *déterminé localement* μ*-presque partout, tel que* $||U_{\mathbf{m}}(t)|| \equiv 1$ *et*

$$\left\langle z, \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu(t)$$

quels que soient $z \in F$ *et* $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$.

Démonstration. Pour tout $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, la fonction d'ensemble $m_{z,\mathbf{x}}$ définie par l'égalité

$$m_{z,\mathbf{x}}(A) = \langle z, \mathbf{m}(A)\mathbf{x}\rangle \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B}$$

$m_{z,\mathbf{x}}$ est une mesure complexe régulière sur T. On a

$$(1) \qquad |m_{z,\mathbf{x}}(A)| \leqslant |z|\, ||\mathbf{x}||_A \mu(A) \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B}$$

donc $m_{z,\mathbf{x}}$ est de base μ. Il existe alors **(2)** une fonction complexe $g_{z,\mathbf{x}}$ définie sur T, localement μ-intégrable (déterminée localement μ-presque partout), telle que

$$m_{z,\mathbf{x}} = g_{z,\mathbf{x}}\mu.$$

Si l'on désigne par $\mu_{z,\mathbf{x}}$ le module (ou la variation) de $m_{z,\mathbf{x}}$ alors une fonction complexe φ définie sur T est essentiellement $\mu_{z,\mathbf{x}}$-intégrable si et seulement si $\varphi g_{z,\mathbf{x}}$ est essentiellement μ-intégrable **(2)** et on a[3]

$$(2) \qquad \int \varphi\, dm_{z,\mathbf{x}} = \int \varphi\, g_{z,\mathbf{x}}\, d\mu \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in L_C^1(m_{z,\mathbf{x}}).$$

[3] L'intégrale essentielle par rapport à μ d'une fonction φ sera notée aussi par $\int \varphi d\mu$ au lieu de $\int^{\bullet} \varphi d\mu$.

On déduit aussitôt qu'on a

(3) $$g_{\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2, \beta_1 \mathbf{x}_1+\beta_2 \mathbf{x}_2} = \alpha_1\beta_1 g_{z_1,\mathbf{x}_1} + \alpha_1\beta_2 g_{z_1,\mathbf{x}_2} + \alpha_2\beta_1 g_{z_2,\mathbf{x}_1} + \alpha_2\beta_2 g_{z_2,\mathbf{x}_2}$$

localement μ-presque partout pour chaques $z_1, z_2 \in F$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{a}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_2 \in C$.

Si $z \in F$, $A \in B$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}$ et si $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$, alors

(4) $$g_{z,\mathbf{x}} = g_{z,\mathbf{y}}$$

μ-presque partout sur A.

De (1) on déduit

$$\mu_{z,\mathbf{x}}(A) \leqslant |z| \, ||\mathbf{x}||_A \mu(A) \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B}(\mu)$$

donc aussi

$$\mu_{z,\mathbf{x}}(B) \leqslant |z| \, ||\mathbf{x}||_A \mu(B)$$

quel que soit $B \subset A$, $(B \in \mathfrak{B}(\mu))$. Il s'ensuit que $L^1(\mu_{z,\mathbf{x}}) \supset L^1(\mu)$.

De (2) on déduit alors

(5) $$\left| \int_B \varphi \, g_{z,\mathbf{x}} \, d\mu \right| \leqslant \int_B |\varphi| \, d\mu_{z,\mathbf{x}} \leqslant |z| \, ||\mathbf{x}||_A \int_B |\varphi| \, d\mu$$

quels que soient $B \subset A$, $(A, B \in \mathfrak{B}(\mu))$ et φ localement μ-intégrable. En particulier, comme $\varphi = \overline{g_{z,\mathbf{x}}}$ est localement μ-intégrable, $|g_{z,\mathbf{x}}|^2$ est localement μ-intégrable, et de (5) on déduit:

(6) $$|g_{z,\mathbf{x}}(t)| \leqslant |z| \, ||\mathbf{x}||_A$$

μ-presque partout sur $A \in \mathfrak{B}(\mu)$.

Soit $(\mathbf{x}_n)$ une suite de champs de vecteurs de $\mathfrak{a}$, telle que la suite $(\mathbf{x}_n(t))$ soit dense dans $E(t)$ quel que soit $t \in T$, et soit $\mathfrak{a}_0$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels complexes des éléments de la suite $(\mathbf{x}_n)$. Pour chaque $t \in T$, soit $E_0(t) = \{\mathbf{x}(t) | \mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0\}$; $E_0(t)$ est un sous-espace vectoriel (par rapport au corps des nombres rationnels complexes) dense dans $E(t)$.

Soit F_0 le sous-espace de F formé des combinaisons linéaires à coefficients rationnels complexes des éléments d'une partie dénombrable dense dans F.

Il existe un ensemble localement μ-négligeable N_1, tel que pour $t \notin N_1$, les relations (3) soient vérifiées quels que soient $z_1, z_2 \in F_0$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{a}_0$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ rationnels complexes.

Il existe un ensemble localement μ-négligeable N_2, tel que pour $t \notin N_2$ on ait

(7) $$|g_{z,\mathbf{x}}(t)| \leqslant |z| \, |\mathbf{x}(t)|$$

quels que soient $z \in F_0$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$. En effet, fixons $z \in F_0$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$ et posons

$$A(z, \mathbf{x}) = \{t | g_{z,\mathbf{x}}(t)| > |z| \, |\mathbf{x}(t)|\}.$$

$A(z, \mathbf{x})$ est μ-mesurable. Soit $K \subset A(z, \mathbf{x})$ un ensemble compact, tel que $g_{z,\mathbf{x}}$ soit continue sur K. Il existe un recouvrement fini de K formé par des ensembles $G_1, \ldots, G_n$ ouverts dans K, tels que pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$ on ait

$$\inf_{t \in G_i} |g_{z,\mathbf{x}}(t)| > |z| \sup_{t \in G_i} |\mathbf{x}(t)|.$$

De (6) on déduit que G_i est μ-négligeable, donc K est μ-négligeable. Si maintenant H est un ensemble compact de T, $A(z, \mathbf{x}) \cap H$ est réunion d'un ensemble μ-négligeable et d'une suite (K_n) d'ensembles compacts telle que la restriction de $g_{z,\mathbf{x}}$ sur chaque K_n soit continue. Alors, chaque K_n est μ-négligeable donc $A(z, \mathbf{x}) \cap H$ l'est aussi. Comme H est arbitraire, il résulte que $A(z, \mathbf{x})$ est localement μ-négligeable. On prend alors

$$N_2 = \bigcup_{\substack{z \in F_0 \\ \mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0}} A(z, \mathbf{x}),$$

et pour $t \notin N_2$, la relation (7) est vérifiée quels que soient $z \in F_0$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$.

Il existe un ensemble localement μ-négligeable N_3, tel que pour chaque $t \notin N_3$ on ait

$$g_{z,\mathbf{x}}(t) = g_{z,\mathbf{y}}(t) \tag{8}$$

quels que soient $z \in F_0$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}_0$ vérifiant $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$.

En effet, fixons $z \in F_0$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}_0$ et posons

$$B(z, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{t | \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t), \qquad g_{z,\mathbf{x}}(t) \neq g_{z,\mathbf{y}}(t)\}.$$

$B(z, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est μ-mesurable. Si $K \subset T$ est un compact quelconque, de (4) on déduit que $K \cap B(z, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est μ-négligeable, donc $B(z, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est localement μ-négligeable. On prend alors N_3 la réunion des $B(z, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(z \in F_0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}_0)$.

Soit

$$N = \bigcup_{i=1}^{3} N_i.$$

Si pour tout $t \in N$ on pose $g_{z,\mathbf{x}}(t) = 0$ quels que soient $z \in F_0$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$, alors les relations (3), (7) et (8) sont vérifiées pour tout $t \in T$, quels que soient les indices appartenant à F_0 et $\mathfrak{a}_0$, et les nombres rationnels complexes α_1, α_2, β_1, β_2.

Fixons maintenant $t \in T$ et $z \in F_0$. Pour chaque $a \in E_0(t)$ on pose

$$g_{z,a}(t) = g_{z,\mathbf{x}}(t)$$

où $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$ est tel que $\mathbf{x}(t) = a$. De l'égalité (8) on déduit que $g_{z,a}(t)$ ne dépend que de $a \in E_0(t)$.

Pour $t \in T$ et $a \in E_0(t)$ fixes, l'application $z \to g_{z,a}(t)$ de F_0 dans C est linéaire (par rapport au corps des nombres rationnels complexes) et continue (7), donc peut être prolongée uniquement par continuité à une forme linéaire et continue $g_a(t)$ sur F (donc $g_a(t) \in F'$). De (7) on déduit qu'on a

$$|g_a(t)| \leqslant |a|. \tag{9}$$

Pour tout $z \in F_0$ on a

$$\langle z, g_a(t) \rangle = g_{z,a}(t).$$

Fixons maintenant $t \in T$. L'application $a \to g_a(t)$ de $E_0(t)$ dans F' est linéaire (par rapport au corps des nombres rationnels complexes) et continue, donc peut être prolongée à une application linéaire et continue $U_{\mathbf{m}}(t)$ de $E(t)$ dans F' (donc $U_{\mathbf{m}}(t) \in \mathfrak{L}(E(t), F')$) et

$$\|U_{\mathbf{m}}(t)\| \leqslant 1. \tag{10}$$

Pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$ on a donc

$$U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t) = g_{\mathbf{x}(t)}(t)$$

quel que soit $t \in T$, donc pour $z \in F_0$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$ et $t \in T$ on a

$$\langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle = g_{z,\mathbf{x}}(t)$$

d'où il résulte, pour $A \in \mathfrak{B}$,

$$\left\langle z, \int \varphi_A \mathbf{x}\, d\mathbf{m}\right\rangle = \int \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\varphi_A(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu(t). \tag{11}$$

Si

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i} . \mathbf{x}_i, \; (A_i \in \mathfrak{B}, \mathbf{x}_i \in \mathfrak{a}_0)$$

et $z \in F_0$, on déduit

$$\left\langle z, \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}\right\rangle = \int \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu(t). \tag{12}$$

Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, et $A \in \mathfrak{B}$ il existe une suite $(\mathbf{x}_n)$ de champs de vecteurs de la forme précédente, uniformément convergente vers $\varphi_A\mathbf{x}$; alors, pour $z \in F_0$ la suite $\langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}_n(t)\rangle$ est uniformément convergente vers $\langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\varphi_A(t)\mathbf{x}(t)\rangle$, donc l'égalité (11) est vraie pour $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ et $A \in \mathfrak{B}$. Alors l'égalité (12) est vraie pour tout champ étagé $\mathbf{x} \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}(T)$, et en appliquant le théorème de Lebesgue on déduit qu'elle est vraie pour tout $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$ et tout $z \in F$.

Montrons maintenant que $\|U_{\mathbf{m}}(t)| \geqslant 1$ localement μ-presque partout, d'où il s'ensuit que $\|U_{\mathbf{m}}(t)| \equiv 1$ localement μ-presque partout, donc partout si l'on modifie $U_{\mathbf{m}}$ sur un ensemble localement μ-négligeable.

Pour chaque $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$, la fonction $t \to |U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)|$ est μ-mesurable, comme borne supérieure de la suite de fonctions mesurables $t \to |\langle z_n, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle|$ où (z_n) est une suite dense dans la sphère unité de F.

La fonction $t \to \|U_{\mathbf{m}}(t)\|$ est aussi μ-mesurable, comme borne supérieure de la suite

$$t \to \frac{|U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|}, \mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0$$

où l'on convient de poser

$$\frac{|U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|} = 0$$

si $\mathbf{x}(t) = 0$.

Pour chaque nombre naturel n posons

$$B_n = \left\{t \mid \|U_{\mathbf{m}}(t)\| < 1 - \frac{1}{n}\right\}.$$

B_n est μ-mesurable, donc est contenu dans un ensemble $B_n' \in \mathfrak{B}'$ tel que $B_n' - B_n$ soit localement μ-négligeable.

Soit $K \subset T$ un ensemble compact. Pour tout $z \in F$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ et $A \in \mathfrak{B}$ on a

$$| \langle z, \mathbf{m}(K \cap B_n' \cap A)\mathbf{x}\rangle | = \left| \int_{K \cap B_n' \cap A} \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\mu(t) \right|$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) |z| \, ||\mathbf{x}||_{K \cap B_n'} \mu(K \cap B_n' \cap A).$$

On déduit alors

$$||\mathbf{m}(K \cap B_n' \cap A)|| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mu(K \cap B_n' \cap A)$$

donc si (A_i) est une partition finie quelconque de $K \cap B_n'$ en ensembles de $\mathfrak{B}$, on a

$$\sum_i ||\mathbf{m}(K \cap B_n' \cap A_i)|| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mu(K \cap B_n')$$

donc

$$\mu(K \cap B_n') \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mu(K \cap B_n')$$

ce qui entraîne que $K \cap B_n'$ est μ-négligeable, donc B_n' (et aussi B_n) est localement μ-négligeable.

La réunion

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

est localement μ-négligeable.

Mais

$$B = \{t | \, ||U_{\mathbf{m}}(t)|| < 1\}$$

donc on a $||U_{\mathbf{m}}(t)|| \geqslant 1$ localement μ-presque partout.

Il reste à montrer l'unicité de $U_{\mathbf{m}}$. Soit V un champ d'opérations défini sur T tel que $V(t) \in \mathfrak{L}(E(t), F')$ quel que soit $t \in T$, et tel en outre que

$$\left\langle z, \int \mathbf{x} \, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, V(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\mu(t)$$

quels que soient $z \in F$ et $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$. On déduit alors que

$$\int_A \langle z, (U_{\mathbf{m}}(t) - V(t))\mathbf{x}(t)\rangle \, d\mu(t) = 0$$

quels que soient $z \in F$, $A \in \mathfrak{B}$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, donc

$$\langle z, (U_{\mathbf{m}}(t) - V(t))\mathbf{x}(t)\rangle = 0$$

localement μ-presque partout, pour chaque $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$. En faisant z parcourir F_0 on déduit d'abord

$$U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t) = V(t)\mathbf{x}(t)$$

localement μ-presque partout pour chaque $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$.

En faisant $\mathbf{x}$ parcourir $\mathfrak{a}_0$, on déduit enfin que

$$U_{\mathbf{m}}(t) = V(t)$$

localement μ-presque partout. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarques.

1°. Soit $U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ tel que pour chaque $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, la fonction $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle$ soit μ-mesurable. Alors, pour tout $z \in F$ et tout champ $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ mesurable par rapport à μ et $\mathfrak{a}$, les fonctions $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle$, $t \to |U(t)\mathbf{x}(t)|$ et $t \to ||U(t)||$ sont μ-mesurables.

En effet, soit $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ mesurable par rapport à μ et $\mathfrak{a}$. Si $K \subset T$ est compact, alors $\varphi_K\mathbf{x}$ est limite μ-presque partout d'une suite $(\mathbf{x}_n)$ de champs étagés, donc $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle\varphi_K(t)$ est μ-mesurable comme limite μ-presque partout de la suite de fonctions μ-mesurables $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}_n(t)\rangle$. On applique ensuite le principe de la localisation et on déduit que $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle$ est μ-mesurable.

Puisque $t \to |\langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle|$ est μ-mesurable, en faisant z parcourir une suite dense dans la sphère unité de F, on déduit que $t \to |U(t)\mathbf{x}(t)|$ est μ-mesurable. Enfin, la fonction $t \to ||U(t)||$ est μ-mesurable comme borne supérieure de la suite de fonctions μ-mesurables

$$t \to \frac{|U(t)\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|}, \mathbf{x} \in \mathfrak{a}_0,$$

où l'on pose

$$\frac{|U(t)\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t)|} = 0$$

si $\mathbf{x}(t) = 0$.

En particulier, cette remarque est valable pour $U_{\mathbf{m}}$.

2°. Si F' est de type dénombrable, alors pour tout champ $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ mesurable par rapport à μ et $\mathfrak{a}$, la fonction $t \to U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable.

En effet, pour chaque $z \in F$ et $z' \in F'$ la fonction $t \to \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle - \langle z, z'\rangle$ est μ-mesurable. En faisant z parcourir une suite dense dans la sphère unité de F, on déduit que la fonction $t \to |U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t) - z'|$ est μ-mesurable. Soit (z_n') une suite dense dans F', $\epsilon > 0$ et $K \subset T$ compact. Pour chaque n posons

$$B_n = \{t|\,|U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t) - z_n'| \leqslant \epsilon\} \cap K.$$

Alors B_n est μ-mesurable et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = K.$$

Il existe une suite (A_n) d'ensembles disjoints μ-mesurables, telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press

et $A_n \subset B_n$ pour chaque n. Posons

$$\mathbf{z}_\epsilon' = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n} z_n'.$$

$\mathbf{z}_\epsilon'$ est μ-mesurable et pour chaque $t \in K$ on a

$$|U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}_\epsilon'(t)| \leqslant \epsilon.$$

Il s'ensuit que $t \to U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable sur K, comme limite uniforme sur K, de fonctions μ-mesurables. En vertu du principe de la localisation, $t \to U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable.

Comme $|U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)| \leqslant ||U_{\mathbf{m}}(t)||\,|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}(t)|$, il s'ensuit que si $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$, alors la fonction $t \to U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-intégrable, donc:

Si F' est de type dénombrable, alors pour chaque $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$ on a

$$\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} = \int U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\, d\mu(t)$$

et pour chaque $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ et $A \in \mathfrak{B}$ on a

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \int_A U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\, d\mu(t).$$

Dans ce cas, le théorème 2 a été démontré par une voie différente dans **(8)**.

3°. S'il existe une famille fondamentale $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ vérifiant l'axiome (G) et la condition suivante:

(T) la fonction $t \to V(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable quel que soit $V \in \mathfrak{D}$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, alors $U_{\mathbf{m}}$ est mesurable, relativement à μ et $\mathfrak{D}$, donc

$$U_{\mathbf{m}} \in L_{\mathfrak{D}}^{\infty}(\mu).$$

En effet, soit (V_n) une suite d'éléments de $\mathfrak{D}$, telle que la suite $(V_n(t))$ soit dense dans $G(t)$ quel que soit $t \in T$. On déduit d'abord que chaque $G(t)$ est de type dénombrable, donc F' l'est aussi; alors $t \to U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$ est μ-mesurable pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ (remarque 2). Pour chaque n, la fonction $t \to V_n(t)\mathbf{x}(t) - U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)$ est alors μ-mesurable donc la fonction $t \to ||V_n(t) - U_{\mathbf{m}}(t)||$ est μ-mesurable (remarque 1).

Soit $\epsilon > 0$ et $K \subset T$ compact. Pour chaque n posons

$$B_n = \{t|\ ||V_n(t) - U_{\mathbf{m}}(t)|| \leqslant \epsilon\} \cap K.$$

B_n est μ-mesurable et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = K.$$

Soit (A_n) une suite d'ensembles disjoints μ-mesurables, telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = K$$

et $A_n \subset B_n$ pour chaque n. Posons

$$U_\epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n} V_n.$$

U_ϵ est mesurable par rapport à μ et $\mathfrak{D}$, et pour $t \in K$ on a

$$\|U_\epsilon(t) - U_{\mathbf{m}}(t)\| \leqslant \epsilon.$$

Il s'ensuit que $U_{\mathbf{m}}$ est mesurable (par rapport à μ et $\mathfrak{D}$) sur K, comme limite uniforme sur K de champs d'opérations mesurables, donc, en vertu du principe de la localisation, $U_{\mathbf{m}}$ est mesurable.

4°. Si $E(t) = E$ quel que soit $t \in T$, et $\mathfrak{L}(E, F')$ est de type dénombrable, alors, pour chaque $A \in \mathfrak{B}$ on a

$$\mathbf{m}(A) = \int_A U_{\mathbf{m}}(t)\, d\mu(t).$$

5°. Si $F = C$, alors $G(t) = E'(t)$ pour chaque $t \in T$. Dans ce cas, $\mathbf{x_m}' = U_{\mathbf{m}}$ est un champ de fonctionnelles de $\mathfrak{C}(\mathfrak{E}')$, où $\mathfrak{E}' = (E'(t))_{t\epsilon T}$. On peut alors écrire

$$\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x_m}'(t)\rangle\, d\mu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^{1}(\mathbf{m}).$$

S'il existe une famille $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{E}')$, vérifiant l'axiome (G) et telle que la fonction scalaire $t \to \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)\rangle$ soit μ-mesurable quels que soient $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ et $\mathbf{x}' \in \mathfrak{a}'$, alors $\mathbf{x_m}'$ est μ-mesurable, donc

$$\mathbf{x_m}' \in L^{\infty}_{\mathfrak{a}'}(\mu).$$

6°. Si $E(t) = C$ quel que soit $t \in T$, alors $\mathfrak{L}(C, F')$ peut être identifié à F'. Dans ce cas $U_{\mathbf{m}}$ est une application de T dans F', donc

$$\left\langle z, \int \varphi(t) d\mathbf{m}(t)\right\rangle = \int \varphi(t)\, \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\rangle\, d\mu(t) \qquad \text{pour } \varphi \in L^1_C(\mu),\ z \in F.$$

Si F' est de type dénombrable, $U_{\mathbf{m}}$ est μ-mesurable et on a

$$\int \varphi(t) d\mathbf{m}(t) = \int \varphi(t) U_{\mathbf{m}}(t)\, d\mu(t) \qquad \text{pour } \varphi \in L^1_C(\mu)$$

et

$$\mathbf{m}(A) = \int_A U_{\mathbf{m}}(t)\, d\mu(t) \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B}.$$

7°. Si m est une mesure complexe, alors $U_{\mathbf{m}}$ est une fonction complexe sur T, μ-mesurable, et à valeurs sur le cercle unité du plan complexe.

8°. Si m est une mesure réelle, alors $U_{\mathbf{m}}$ est à valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$, donc est de la forme $U_{\mathbf{m}} = \varphi_A - \varphi_B$, où $A \cup B = T$ et $A \cap B = \phi$. Dans ce cas

$$m = \varphi_A \mu - \varphi_B \mu, \qquad \mu = \varphi_A \mu + \varphi_B \mu$$

donc $m^+ = \varphi_A \mu$ et $m^- = \varphi_B \mu$.

Soit ν une mesure positive sur T ($\nu(A) < \infty$ pour $A \in \mathfrak{B}$).

On dit qu'une mesure vectorielle $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à ν, si $\nu(A) = 0$ implique $\mathbf{m}(A) = 0$.

PROPOSITION 9. *Soit ν une mesure positive sur T. Une mesure vectorielle $\mathbf{m}$, à variation finie μ est absolument continue par rapport à ν, si et seulement si sa variation μ est absolument continue par rapport à ν.*

Soit $A \in \mathfrak{B}$ telle que $\nu(A) = 0$. Si μ est absolument continue par rapport à ν, on a $\mu(A) = 0$ donc $\mathbf{m}(A) = 0$, c'est-à-dire, $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à ν. Inversement, si $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à ν, pour tout $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subset A$ on a $\mathbf{m}(B) = 0$ (car $\nu(B) = 0$), donc $\mu(A) = 0$, c'est-à-dire μ est absolument continue par rapport à ν.

Remarque. Si ν est régulière et $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à ν, alors $\mathbf{m}$ est aussi régulière (car sa variation μ est régulière).

Le théorème suivant est une généralisation du théorème bien connu de Lebesgue–Nikodym.

THÉORÈME 3. *Soit ν une mesure régulière positive sur T. Une mesure vectorielle $\mathbf{m}$ est à variation finie et absolument continue par rapport à ν, si et seulement si il existe un champ d'opérations $V_\mathbf{m} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$, tel que la fonction $t \to ||V_\mathbf{m}(t)||$ soit localement ν-intégrale et que pour tout $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_\mathfrak{a}^1(\mathbf{m})$ on ait*

$$\left\langle z, \int \mathbf{x} d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, V_\mathbf{m}(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t).$$

Le champ d'opérations $V_\mathbf{m}$ est alors déterminé localement ν-presque partout, et pour chaque $A \in \mathfrak{B}$ on a

$$\mu(A) = \int_A ||V_\mathbf{m}(t)|| \, d\nu(t).$$

Démonstration. Supposons que $\mathbf{m}$ est à variation finie et absolument continue par rapport à ν. Alors sa variation μ l'est aussi, donc il existe une fonction positive g sur T, localement ν-intégrable (déterminée localement ν-presque partout), telle qu'une fonction complexe φ est essentiellement μ-intégrable si et seulement si φg est essentiellement ν-intégrable; on a alors

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi g \, d\nu \qquad \text{pour } \varphi \in L_C^1(\mu).$$

D'après le théorème 2, il existe un champ d'opérations $U_\mathbf{m} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ (déterminé localement μ-presque partout), tel que $||U_\mathbf{m}(t)|| \equiv 1$ et que pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_\mathfrak{a}^1(\mathbf{m})$ et $z \in F$ on ait $\langle z, U_\mathbf{m}\mathbf{x}\rangle \in L_C^1(\mu)$ et

$$\left\langle z, \int \mathbf{x} \, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, U_\mathbf{m}(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\mu(t).$$

Si l'on pose $V_\mathbf{m} = gU_\mathbf{m}$ alors $||V_\mathbf{m}(t)|| = g(t)$, donc la fonction $t \to ||V_\mathbf{m}(t)||$ est localement ν-intégrable et

$$\mu(A) = \int_A ||V_\mathbf{m}(t)|| \, d\nu(t)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press

pour chaque $A \in \mathfrak{B}$. Si $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}{}^1(\mathbf{m})$ alors la fonction $\langle z, V_{\mathbf{m}}\mathbf{x}\rangle$ est essentiellement ν-intégrable quel que soit $z \in F$ et on a

$$\left\langle z, \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, V_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu(t).$$

L'unicité de $V_{\mathbf{m}}$ se déduit comme dans la démonstration du théorème 2.

Inversement, si V est un champ d'opérations tel que la fonction $t \rightarrow ||V(t)||$ soit localement ν-intégrable et que pour tout $z \in F$ et $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}{}^1(\mathbf{m})$ on ait

$$\left\langle z, \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, V(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu(t)$$

alors $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à ν. On a alors

$$||\mathbf{m}(A)|| \leqslant \int_A ||V(t)d\nu(t) \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B}$$

d'où l'on déduit que $\mathbf{m}$ est à variation finie μ. De la première partie de la démonstration on déduit que $V = V_{\mathbf{m}}$ localement ν-presque partout.

Remarques.

1°. Si F' est de type dénombrable, alors

$$\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} = \int V_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}{}^1(\mathbf{m})$$

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \int_A V_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)d\nu(t) \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B} \text{ et } \mathbf{x} \in \mathfrak{a}.$$

2°. Si $E(t) = E$ quel que soit $t \in T$ et si $\mathfrak{L}(E, F')$ est de type dénombrable, alors

$$\mathbf{m}(A) = \int_A V_{\mathbf{m}}(t)d\nu(t) \qquad \text{pour } A \in \mathfrak{B}.$$

3°. Si l'espace F ou si les espaces $E(t)$ ne sont pas de type dénombrable, il est possible que $V_{\mathbf{m}}$ ne soit pas uniquement déterminé (à un ensemble localement ν-négligeable près).

Exemple 1. $T = [0, 1]$; ν la mesure de Lebesgue sur T; $E(t) = E = C(T)$ quel que soit $t \in T$, où $C(T)$ est l'espace des fonctions numériques continues sur T, muni de la topologie définie par la norme

$$||f|| = \sup_{t \in T} |f(t)|;$$

F l'espace des fonctions numériques z définies sur T, telles que

$$||z|| = \sum_{t \in T} |z(t)| < +\infty;$$

F' est alors l'espace des fonctions numériques z' définies sur T telles que

$$||z'|| = \sup_{t \in T} |z'(t)| < +\infty.$$

L'espace E est de type dénombrable, tandis que F n'est pas de type dénombrable. Toute fonction $z \in F$ est nulle en dehors d'un ensemble dénombrable, donc ν-négligeable.

Considérons la mesure $\mathbf{m} = 0$ sur T à valeurs dans $\mathfrak{L}(E, F')$.

Pour chaque $t \in T$ considérons l'application $V(t):E \to F'$ définie par $V(t)f = \varphi_{\{t\}}f$ pour $f \in E$. On a $\|V(t)\| = 1$ quel que soit $t \in T$ et

$$\langle z, V(t)f\rangle = \langle z, \varphi_{\{t\}}f\rangle = \sum_{s \in T} z(s)\varphi_{\{t\}}(s)f(s) = z(t)f(t)$$

quels que soient $z \in F$ et $f \in E$. Soit $\mathbf{x} \in L_E^1(\mathbf{m})$; pour chaque $t \in T$ posons $\mathbf{x}(t) = f_t \in E$. Alors, pour $z \in F$,

$$\int \langle z, V(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t) = \int \langle z, V(t)f_t\rangle \, d\nu(t) = \int z(t)f_t(t)d\nu(t) = 0$$

donc

$$\left\langle z, \int \mathbf{x} \, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, V(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t).$$

D'autre coté, pour $U(t) \equiv 0$ on a aussi

$$\left\langle z, \int \mathbf{x} \, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t)$$

et $V(t) \not\equiv U(t)$ quel que soit $t \in T$.

Exemple 2. T et ν comme plus haut; pour tout $t \in T$, $E(t) = \mathrm{E}$ l'espace des fonctions $f \colon T \to R$ telles que

$$\|f\| = \sum_{t \in T} |f(t)| < +\infty;$$

$F = C(T)$, donc F' est l'espace des mesures de Radon sur T. L'espace F est de type dénombrable, mais E n'est pas de type dénombrable.

Pour tout $t \in T$ considérons l'application $V(t) \colon E \to F'$ définie par $V(t)f = f(t)\epsilon_t$ pour $f \in E$, où ϵ_t est la mesure de masse totale 1 concentrée au point t. On a $\|V(t)\| = 1$ quel que soit $t \in T$ et $\langle z, V(t)f\rangle = \langle z, f(t)\epsilon_t\rangle = z(t)f(t)$, quels que soient $z \in F$ et $f \in E$. On vérifie comme plus haut que, pour $\mathbf{m} = 0$ et $U(t) \equiv 0$ on a

$$\left\langle z, \int \mathbf{x} \, d\mathbf{m} \right\rangle = \int \langle z, V(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t) = \int \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t) = 0$$

quels que soient $z \in F$ et $\mathbf{x} \in L_E^1(\mathbf{m})$.

Voici maintenant le théorème réciproque du théorème 2.

THÉORÈME 4. *Soit μ une mesure positive régulière sur T et U un champ d'opérations tel que $\|U(t)\| \equiv 1$ et que pour tout $z \in F$ et tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, la fonction $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle$ soit μ-mesurable. Alors la fonction d'ensemble $\mathbf{m}$, définie par l'égalité*

$$\langle z, \mathbf{m}(A)\rangle = \int_A \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\mu(t)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press

pour $z \in F$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, $A \in \mathfrak{B}$, *est une mesure vectorielle sur* T, *dont la variation est* μ.

Démonstration. On déduit d'abord que la fonction $t \to \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle$ est localement μ-intégrable quel que soient $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$. Pour $z \in F$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ et $A \in \mathfrak{B}$ posons

$$M(z, \mathbf{x}, A) = \int_A \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu(t).$$

L'application $M(\mathbf{x}, A): z \to M(z, \mathbf{x}, A)$ est une forme linéaire et continue sur F (donc $M(\mathbf{x}, A) \in F'$) car

$$|M(z, \mathbf{x}, A)| \leqslant |z|\; ||\mathbf{x}||_A \mu(A).$$

On a donc $|M(\mathbf{x}, A)| \leqslant ||\mathbf{x}||_A \mu(A)$ et $\langle z, M(\mathbf{x}, A)\rangle = M(z, \mathbf{x}, A)$.

L'application $\mathbf{m}(A): \mathbf{x} \to M(\mathbf{x}, A)$ de $\mathfrak{a}$ dans F' est une application linéaire et continue (donc $\mathbf{m}(A) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}, F')$ et $\langle z, \mathbf{m}(A)\mathbf{x}\rangle = M(z, \mathbf{x}, A)$, donc

$$\langle z, \mathbf{m}(A)\mathbf{x}\rangle = \int_A \langle z, U(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu(t).$$

On vérifie aisément que si $\varphi_A \mathbf{x} = \varphi_A \mathbf{y}$, $(A \in \mathfrak{B}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a})$ alors $\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\mathbf{y}$, donc $\mathbf{m}$ est une fonction vectorielle d'ensemble, et $||\mathbf{m}(A)|| \leqslant \mu(A)$ pour $A \in \mathfrak{B}$. De l'inégalité $||\mathbf{m}(A)|| \leqslant \mu(A)$ on déduit que $\mathbf{m}$ est une mesure vectorielle à variation finie λ et que $\lambda \leqslant \mu$.

La mesure vectorielle $\mathbf{m}$ est régulière puisque μ est régulière. En outre, $\mathbf{m}$ est absolument continue par rapport à μ, et du théorème 3 on déduit que

$$\lambda(A) = \int_A ||U(t)||\, d\mu(t) = \mu(A)$$

et ceci achève la démonstration.

On dit que deux mesures positives μ et ν sont étrangères, si $\lambda \leqslant \mu$ et $\lambda \leqslant \nu$ implique $\lambda = 0$.

Deux mesures vectorielles $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ à variation finie sont étrangères si leurs variations μ et ν sont étrangères.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Lebesgue.

THÉORÈME 5. *Soit* ν *une mesure régulière positive sur* T. *Toute mesure vectorielle régulière et à variation finie* $\mathbf{m}$ *sur* T *peut s'écrire sous la forme*

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}' + \mathbf{m}'$$

où $\mathbf{n}'$ *et* $\mathbf{m}'$ *sont des mesures vectorielles régulières et à variation finie, telles que* $\mathbf{n}'$ *soit absolument continue par rapport à* ν, *et que* $\mathbf{m}'$ *soit étrangère à* ν.

Démonstration. Soit μ la variation de $\mathbf{m}$. D'après le théorème de Lebesgue **(2)**, μ peut s'écrire sous la forme

$$\mu = \nu' + \mu'$$

où ν' et μ' sont des mesures régulières positives, telles que ν' soit absolument continue par rapport à ν et μ' soit étrangère à ν.

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press

D'autre côté, $\mathbf{m}$ peut s'écrire

$$\langle z, \mathbf{m}(A)\mathbf{x}\rangle = \int_A \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu(t)$$

pour $z \in F$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, et $A \in \mathfrak{B}$, où $||U_{\mathbf{m}}(t)|| \equiv 1$. On a alors

$$\langle z, \mathbf{m}(A)\rangle = \int_A \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu'(t) + \int_A \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu'(t).$$

Si l'on pose

$$\langle z, \mathbf{n}'(A)\mathbf{x}\rangle = \int_A \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu'(t)$$

et

$$\langle z, \mathbf{m}'(A)\mathbf{x}\rangle = \int_A \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\mu'(t),$$

alors $\mathbf{n}'$ et $\mathbf{m}'$ sont des mesures vectorielles régulières dont les variations sont respectivement ν' et μ', car pour tout $z \in F$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, la fonction $t \to \langle z, U_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle$ est mesurable aussi parr apport à ν' et par rapport à μ'. En outre, $\mathbf{n}'$ est absolument continue par rapport à ν, et $\mathbf{m}'$ est étrangère à ν, et pour tout $A \in \mathfrak{B}$ on a

$$\mathbf{m}(A) = \mathbf{n}'(A) + \mathbf{m}'(A).$$

Ceci achève la démonstration.

2. Opérations linéaires sur l'espace $\mathbf{L}_{\mathfrak{a}}{}^{p}$. Soit ν une mesure de Radon positive sur T, et considérons l'espace $L_{\mathfrak{a}}{}^{p}(\nu)$, $1 \leqslant p < +\infty$.[4] Soit f une application linéaire de $L_{\mathfrak{a}}{}^{p}(\nu)$ dans F'. Posons

$$|||f||| = \sup \sum_i |f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)|$$

le sup. étant considéré pour tous les champs étagés[5] $\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$ tels que les A_i soient disjoints et que $N_p(\mathbf{x}, \nu) \leqslant 1$. On a

$$||f|| \leqslant |||f||| \leqslant +\infty.$$

Remarques.

1°. Si $p = 1$ on a toujours $||f|| = |||f|||$. En effet, si $||f|| = +\infty$, on a aussi $|||f||| = +\infty$. Supposons donc que $||f|| < +\infty$. Pour tout champ étagé $\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$ tel que $N_1(\mathbf{x}, \nu) \leqslant 1$ on a

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)| \leqslant \sum_i ||f||\, N_1(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i, \nu) = ||f||\, N_1(\mathbf{x}, \nu) \leqslant ||f||$$

donc $|||f||| \leqslant ||f||$, d'où il s'ensuit que $||f|| = |||f|||$.

2°. Si $1 \leqslant p < +\infty$ et $F = C$, on a toujours $||f|| = |||f|||$.

[4]Pour la définition des espaces $L_{\mathfrak{a}}{}^{p}(\nu)$ voir **(14)**.

[5]On peut supposer que les $\mathbf{x}_i$ sont continus, non nécessairement de $\mathfrak{A}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press

Supposons $||f|| < +\infty$. Soit

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$$

un champ étagé tel que les A_i soient disjoints et que $N_p(\mathbf{x}, \nu) \leqslant 1$. Pour chaque i, il existe un nombre complexe θ_i tel que $|\theta_i| = 1$ et

$$|f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)| = \theta_i f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i) = f(\varphi_{A_i}\theta_i\mathbf{x}_i).$$

Alors

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)| = f\left(\sum_i \varphi_{A_i}\theta_i\mathbf{x}_i\right) \leqslant ||f||\, N_p\left(\sum_i \varphi_{A_i}\theta_i\mathbf{x}_i, \nu\right) \leqslant ||f||$$

donc $|||f||| \leqslant ||f||$, et par suite $||f|| = |||f|||$.

3°. Si $1 < p < +\infty$ et $F \neq C$, on peut avoir $||f|| < |||f|||$.

Prenons $T = R$, ν la mesure de Lebesgue sur T, $E(t) = E = R$ quel que soit $t \in T$ et

$$F = L^q(\nu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si f est l'application identique de $L^p(\nu)$ dans F', on a évidemment $||f|| = 1$. Montrons que $|||f||| = +\infty$. En effet, pour chaque n, on peut choisir n intervals disjoints $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et n nombres $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que $\nu(A_i) = 1/n$ et $|x_i| = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Pour la fonction étagée

$$x = \sum_{i=1}^n \varphi_{A_i}x_i$$

on a $N_p(x, \nu) = 1$ et

$$\sum_{i=1}^n |f(\varphi_{A_i}x_i)| = \sum_{i=1}^n N_p(\varphi_{A_i}x_i, \nu) = \sum_{i=1}^n [\nu(A_i)]^{1/p}\, |x_i| = n\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}.$$

On déduit alors que $|||f||| = +\infty$.

4°. L'ensemble des applications linéaires $f: L_{\mathfrak{a}}^p(\nu) \to F'$ telles que $|||f||| < +\infty$ est un espace vectoriel et $|||f|||$ est une norme sur cet espace.

THÉORÈME 6. *Une application linéaire f de $L_{\mathfrak{a}}^p(\nu)$ dans F' peut s'écrire sous la forme*

$$\langle z, (f\mathbf{x})\rangle = \int \langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu) \text{ et } z \in F$$

où $U_f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ et

$$N_q(U_f, \nu) < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

si et seulement si $|||f||| < +\infty$. Dans ce cas U_f est déterminé localement ν-presque partout et $|||f||| = N_q(U_f, \nu)$.

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe un champ d'opérations

$U_f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ tel que $N_q(U_f, \nu) < +\infty$ et que pour tout $z \in F$ et $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu)$ la fonction $t \to \langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)\rangle$ soit essentiellement ν-intégrable et

$$\langle z, f(\mathbf{x})\rangle = \int \langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t).$$

Montrons alors que $|||f||| < +\infty$. Remarquons d'abord que la fonction $t \to ||U_f(t)||$ est ν-mesurable (remarque 1° suivant le théorème 2) donc appartient à $L^q(\nu)$, et

$$|\langle z, f(\mathbf{x})\rangle| \leqslant \int |\langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)|\, d\nu(t)$$
$$\leqslant \int |z| \, ||U_f(t)|| \, |\mathbf{x}(t)| \, d\nu(t) = |z| \int ||U_f(t)|| \, |\mathbf{x}(t)| \, d\nu(t)$$

donc

$$|f(\mathbf{x})| \leqslant \int ||U_f(t)|| \, |\mathbf{x}(t)| \, d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu).$$

Soit

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$$

un champ de vecteurs étagé tel que les A_i soient disjoints. Alors

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)| \leqslant \sum_i \int ||U_f(t)|| \, |\mathbf{x}_i(t)| \, \varphi_{A_i}(t) \, d\nu(t)$$
$$= \int ||U_f(t)|| \left| \sum_i \varphi_{A_i}(t)\mathbf{x}_i(t) \right| d\nu(t) \leqslant N_q(U_f, \nu) \, N_p(\mathbf{x}, \nu)$$

donc

$$|||f||| \leqslant N_q(U_f, \nu) < +\infty.$$

Inversement, supposons que $|||f||| < +\infty$. Pour tout $A \in \mathfrak{B}$ et[6] $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$ on a $\varphi_A\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu)$. Posons

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = f(\varphi_A\mathbf{x}).$$

Si $A \in \mathfrak{B}$ et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{a}$ sont tels que $\varphi_A\mathbf{x} = \varphi_A\mathbf{y}$, on a

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\mathbf{y}.$$

Pour chaque $A \in \mathfrak{B}$, $\mathbf{m}(A)$ est une application linéaire de $\mathfrak{a}$ dans F'. Elle est continue, car si $\mathbf{x} \in \mathfrak{a}$, $A \in \mathfrak{B}$ et $||\mathbf{x}||_A \leqslant 1$, alors

$$|\mathbf{m}(A)\mathbf{x}| = |f(\varphi_A\mathbf{x})| \leqslant ||f|| \left(\int \varphi_A(t) \, |\mathbf{x}(t)|^p \, d\nu(t)\right)^{1/p} \leqslant ||f|| \, N_p(\varphi_A, \nu)$$

donc $\mathbf{m}(A) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}, F')$. On déduit que $\mathbf{m}$ est une fonction vectorielle d'ensemble et

$$||\mathbf{m}(A)|| \leqslant ||f|| N_p(\varphi_A, \nu).$$

[6]Si $\mathfrak{A}$ ne vérifie pas l'axiome (i), on peut lui ajouter de champs continus pour obtenir une famille équivalente $\mathfrak{A}'$ vérifiant (i).

De cette inégalité il résulte que $\mathbf{m}$ est dénombrablement additive, donc une mesure vectorielle. De la condition $|||f||| < +\infty$ on déduira que $\mathbf{m}$ est à variation finie. En effet, soit $A \in \mathfrak{B}$, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$ dont la réunion est A et $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Soit encore $\epsilon > 0$. Pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{a}$ tel que $||\mathbf{x}_i||_A \leqslant 1$ et tel en outre que

$$||\mathbf{m}(A_i)|| \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i| + \frac{\epsilon}{|c_i|n} \qquad \text{si } c_i \neq 0$$

$$||\mathbf{m}(A_i)|| \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i| + \frac{\epsilon}{n} \qquad \text{si } c_i = 0.$$

Alors, pour tout i on a

$$||\mathbf{m}(A_i)||\ |c_i| \leqslant |\mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i c_i| + \frac{\epsilon}{n}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{m}(A_i)||\ |c_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i c_i| + \epsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\varphi_{A_i} c_i \mathbf{x}_i)| + \epsilon \equiv |||f|||\, N_p\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i \mathbf{x}_i, \nu\Big) + \epsilon$$

$$\leqslant |||f|||\, N_p\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i, \nu\Big) + \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on a

$$\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{m}(A_i)||\ |c_i| \leqslant |||f|||\, N_p\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i, \nu\Big).$$

En particulier, pour $c_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{m}(A_i)|| \leqslant |||f|||\, N_p(\varphi_{A_i}, \nu)$$

donc

$$\mu(A) \leqslant |||f|||\mathrm{N}_p(\varphi_A, \nu) < +\infty$$

c'est-à-dire, $\mathbf{m}$ est à variation finie μ; en outre μ est absolument continue par rapport à ν, donc μ est régulière. Alors $\mathbf{m}$ est aussi absolument continue par rapport à ν et régulière.

On a aussi l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\ |c_i| \leqslant |||f|||\, N_p\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} c_i, \nu\Big)$$

qui sera utilisée dans la suite. En effet, soit $\epsilon > 0$. Pour chaque i, il existe une famille finie (B_{ij}) d'ensembles disjoints de $\mathfrak{B}$ dont la réunion est A_i, telle que

$$\mu(A_i) \leqslant \sum_j ||\mathbf{m}(B_{ij})|| + \frac{\epsilon}{|c_i|n} \qquad \text{si } c_i \neq 0$$

$$\mu(A_i) \leqslant \sum_j ||\mathbf{m}(B_{ij})|| + \frac{\epsilon}{n} \qquad \text{si } c_i = 0.$$

Alors, pour chaque i on a

$$\mu(A_i)\,|c_i| \leqslant \sum_j ||\mathbf{m}(B_{ij})|| + \frac{\epsilon}{n}$$

donc

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\,|c_i| \leqslant \sum_{i,j} ||\mathbf{m}(B_{ij})||\,|c_i| + \epsilon$$
$$\leqslant |||f|||\,N_p\Big(\sum_{i,j} \varphi_{B_{ij}}c_i, \nu\Big) + \epsilon = |||f|||\,N_p\Big(\sum_{i=1}^n \varphi_{A_i}c_i, \nu\Big).$$

ϵ étant arbitraire, on déduit alors

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\,|c_i| \leqslant |||f|||\,N_p\Big(\sum_{i=1}^n \varphi_{A_i}c_i, \nu\Big).$$

Puisque $\mathbf{m}$ est à variation finie et absolument continue par rapport à ν, il existe un champ d'opérations $V_{\mathbf{m}} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ tel que

$$\langle z, \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}\rangle = \int \langle z, V_{\mathbf{m}}(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu(t)$$

pour $z \in F$ et $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mathbf{m})$, et

$$\int \varphi\, d\mu = \int ||V_{\mathbf{m}}(t)||\,\varphi(t)\, d\nu(t) \qquad \text{pour } \varphi \in L^1(\mu).$$

On prend $U_f = V_{\mathbf{m}}$, donc

$$\int \varphi\, d\mu = \int ||U_f(t)||\,\varphi(t)\, d\nu(t) \qquad \text{pour } \varphi \in L^1(\mu).$$

Soit

$$\varphi = \sum_i \varphi_{A_i}c_i$$

une fonction réelle étagée définie sur T, telle que les A_i soient disjoints; φ est μ-intégrable, donc

$$\left|\int ||U_f(t)||\,\varphi(t)\, d\nu(t)\right| = \left|\int \varphi(t)\, d\mu(t)\right| \leqslant \sum \mu(A_i)\,|c_i| \leqslant |||f|||\,N_p(\varphi, \nu).$$

On déduit alors que la fonction $t \to ||U_f(t)||$ est de puissance $q$ème intégrable pour ν et que

$$N_q(U_f, \nu) \leqslant |||f||| < +\infty.$$

Il s'ensuit que $L_{\mathfrak{a}}^p(\nu) \subset L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$, donc

$$\left\langle z, \int \mathbf{x}\, d\mathbf{m}\right\rangle = \int \langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)\rangle\, d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu) \text{ et } z \in F.$$

Si

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$$

est un champ de vecteurs étagé tel que les A_i soient disjoints et que $N_p(\mathbf{x},\nu) \leqslant 1$, on a,

$$\sum_i |f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i)| = \sum_i |\mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i| = \sum_i \left|\int \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i d\mathbf{m}\right|$$

$$\leqslant \sum_i \int ||U_f(t)|| \, \varphi_{A_i}(t) \, |\mathbf{x}_i(t)| \, d\nu(t)$$

$$= \int ||U_f(t)|| \left| \sum_i \varphi_{A_i}(t)\mathbf{x}_i(t) \right| d\nu(t) \leqslant N_q(U_f, \nu)N_p(\mathbf{x}, \nu) \leqslant N_q(U_f, \nu)$$

donc $|||f||| \leqslant N_q(U_f, \nu)$ et donc

$$|||f||| = N_q(U_f, \nu).$$

Pour tout champ étagé

$$\mathbf{x} = \sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i$$

on a

$$\int \mathbf{x}\, d\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i = \sum_i f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}_i) = f\left(\sum_i \varphi_{A_i}\mathbf{x}_i\right) = f(\mathbf{x}).$$

Si $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu)$, il existe une suite $(\mathbf{x}_n)$ de champ de vecteurs étagés telle que $N_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \nu) \to 0$. Alors $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$. D'autre part, $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^1(\mu)$ et

$$N_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \mu) = \int |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)| \, d\mu(t) \leqslant |||f||| \, N_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \nu)$$

donc $N_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n, \mu) \to 0$. Alors $\int \mathbf{x}_n d\mathbf{m} \to \int \mathbf{x} d\mathbf{m}$ et comme $f(\mathbf{x}_n) = \int \mathbf{x}_n d\mathbf{m}$, on déduit $f(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x} d\mathbf{m}$, donc

$$\langle z, f(\mathbf{x})\rangle = \int \langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu) \text{ et } z \in F.$$

L'unicité de U_f se déduit comme dans la démonstration du théorème 2. Ceci achève la démonstration.

Remarques.

1°. Si F' est de type dénombrable, on a

$$f(\mathbf{x}) = \int U_f(t)\mathbf{x}(t) \, d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^p(\nu).$$

2°. S'il existe une famille fondamentale $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ vérifiant l'axiome (G) et la condition (T), alors $U_f \in L_{\mathfrak{D}}^q(\nu)$.

3°. Si l'espace F ou si les espaces $E(t)$ ne sont pas de type dénombrable, il est possible que U_f ne soit pas uniquement déterminé localement ν-presque partout.

4°. Si f est une application linéaire de $L_{\mathfrak{a}}^{p}(\nu)$ dans un espace de Banach qui n'est pas le dual d'un espace normé, il est possible que f n'admet pas une représentation intégrale quoique $|||f||| < +\infty$. Par exemple, pour l'application identique f de $L^1((0, +\infty), \nu)$ dans lui-même (ν désignant la mesure de Lebesgue) on a $|||f||| = ||f|| = 1$, mais f n'admet pas une représentation intégrale (voir **(21)**).

Corollaire 1. *Pour toute application linéaire et continue f de $L_{\mathfrak{a}}^{1}(\nu)$ dans F', il existe un champ d'opérations $U_f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ tel que $||f|| = N_\infty(U_f, \nu)$ et que*

$$\langle z, f(\mathbf{x})\rangle = \int \langle z, U_f(t)\mathbf{x}(t)\rangle \, d\nu(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^{1}(\nu) \text{ et } z \in F.$$

En effet, pour $p = 1$ on a $|||f||| = ||f|| < +\infty$.

Ce résultat a été démontré dans **(6)** pour le cas où F' est de type dénombrable.

Corollaire 2. *Pour toute fonctionnelle linéaire et continue f sur $L_{\mathfrak{a}}^{p}(\nu)$, il existe un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}_f' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E}')$ tel que $N_q(\mathbf{x}_f', \nu) = ||f||$ et que pour tout $\mathbf{x} \in L_{\mathfrak{a}}^{p}(\nu)$ on ait*

$$f(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}_f'(t)\rangle \, d\nu(t).$$

En effet, dans ce cas $|||f||| = ||f|| < +\infty$, et $F = C$. Ce résultat a été démontré par C. Ionescu Tulcea **(15)**.

Bibliographie

1. S. Bochner and A. E. Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Annals of Math., *39* (1938), 913–944.

2. N. Bourbaki, *Intégration*, Chap. I–IV (1952), Chap. V (1956).

3. J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue Nikodym (III)*, Annales Univ. Grenoble, *23* (1947–48), 25–53.

4. ——— *Sur le théorème de Lebesgue Nikodym, IV*, J. Indian Math. Soc., *15* (1951), 77–86.

5. ——— *Sur le théorème de Lebesgue Nikodym, V*, Can. J. Math., *3* (1951), 129–140.

6. N. Dinculeanu, *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, *245* (1957), 1203–1255.

7. ——— *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires, II*, Compositio Mathematica, *14* (1959), 1–22.

8. ——— *Sur la repésentation intégrale de certaines opérations linéaires, III*, Proc. Amer. Math. Soc., *10* (1959), 59–68.

9. ——— *Mesures vectorielles et opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, *246* (1958), 2328–2331.

10. ——— *Mesures vectorielles sur les espaces localement compacts*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., *2* (1958), 137–164.

11. N. Dinculescu et C. Foias, *Mesures vectorielles et opérations linéaires sur $L_E{}^p$*, C. R. Acad. Sci., Paris, *248* (1959), 1759–1762.

12. N. Dunford and B. J. Petis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc., *47* (1940), 323–392.

13. C. Foias, *Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien*, Acta Sc. Math. Szeged, *20* (1959), 117–154.

14. R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires*, Annals of Math., *53* (1951), 68–124.

15. C. T. Ionescu Tulcea, *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs*, Bull. Sci. Math., *79* (1955), 106–111.

16. R. S. Phillips, *On linear transformation*, Trans. Amer. Math. Soc., *48* (1940), 516–541.

17. R. G. Bartle, N. Dunford, and S. Schwarz, *Weak compactness and vector measures*, Can. J. Math., *7* (1955), 289–305.

18. M. Gowurin, *Ueber die Stieltjesche integration abstrakter Funktionen*, Fundamenta Math., *27* (1936), 254–268.

19. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'un espace de type* $C(K)$, Can. J. Math., *5* (1953), 129–173.

20. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract* (M)*-spaces*, Annals of Math., *42* (1941), 994–1024.

21. S. Zaidman, *Sur la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., Tome 2 (*50*), (1958), 479–483.

22. A. I. Tulcea and C. I. Tulcea, *On the decomposition and integral representation af continuous linear operators*, Annali di Matematica pura ed applicata, *53* (1961), 63–87 (Ajouté sur les epreuves).

Université de Bucarest
Bucarest, Roumanie

https://doi.org/10.4153/CJM-1961-044-5 Published online by Cambridge University Press