SUR UN INVARIANT INTÉGRAL DU PROBLÈME DES n CORPS: CONSÉQUENCE DE L'HOMOGÉNÉITÉ DU POTENTIEL

L. LOSCO

Laboratoire de Mécanique Théorique, Université de Besançon, 25030 Besançon Cédex, France

Abstract. An integral invariant is a generalization of first integrals to differential forms. Although this mathematical technique is more difficult, the integral invariants allow to obtain new properties for systems which have already well-known first integrals. Integral invariant of first order correspond to a 'local first integral' near any solution of motion. In this work I obtain an '11th local first integral' for the gravitational n-body problem, or any homogeneous n-body problem as planetary systems. As this local first integral contains a secular term, a discussion of the stability is obtained. The integral invariant is used for the construction of very particular solutions (Levi Civita's or Poincaré's singular solutions). These solutions realize conditional maximum or minimum of the contraction of the system.

1. Introduction

Un invariant intégral est une forme différentielle qui se conserve au cours du mouvement: c'est une généralisation naturelle de l'intégrale première. Pour les problèmes dont les intégrales premières connues sont limitées, les invariants intégraux peuvent amener à des conséquences très utiles. Dans une récente publication (Losco, 1973) je mets en évidence pour tout problème de n corps de positions $(q_1 \ldots q_n)$ de variables conjuguées $(p_1 \ldots p_n)$ dans un champ de forces homogène de $d^0 k$, l'existence de l'invariant intégral

$$\omega = (1 + \tfrac{1}{2}k)\, p\, \mathrm{d}q - \mathrm{d}(pq) + (1 - \tfrac{1}{2}k)\, t\, \mathrm{d}h,$$

où h est l'énergie.

Cet invariant intégral est déjà signalé dans Poincaré (*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome 3), qui ne l'a exploité que pour le problème des deux corps.

Dans ω apparaît

$$pq = \sum_{i=1}^{n} m_i q_i q_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, (\tfrac{1}{2} m_i q_i^2).$$

Posons $I = m_i q_i^2$ (moment d'inertie en O fixe ou G, viriel), $pq = \frac{1}{2}(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) = \frac{1}{2}\dot{I}$.

Si $k = -1$:

$$\omega = \tfrac{1}{2} p\, \mathrm{d}q - \tfrac{1}{2} \mathrm{d}\dot{I} + \tfrac{3}{2} t\, \mathrm{d}h,$$

ω ne correspond pas en général à une intégrale première sauf si $k = 2$ $(I = 4ht + I_0)$.

L'invariant complet (Cartan, 1971) est aussi très utile:

$$\omega^* = \omega - kh\, \mathrm{d}t.$$

Extensions. Par la même méthode (Losco, 1973):

Y. Kozai (ed.), The Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems, 249–255.

(a) Le lagrangien est homogène de degré 2 par rapport à q et $\dot{q}$, alors on a

$$\omega = p\,\mathrm{d}q - q\,\mathrm{d}p.$$

Ceci s'applique aux mouvements relatifs à un système d'axes tournants dans un potentiel du second degré.

(b) Le potentiel dans le plan tournant est du type spirale:

$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \omega r^2\dot{\theta} + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + U_0(r) + A(r)\cos[\phi(r) - m\theta].$$

Supposons que U_0 et A sont homogènes du second degré et que $\phi(r) = \alpha \log r$:

$$\omega = 2p_\theta\,\mathrm{d}\theta - r\,\mathrm{d}p_r - (\alpha/m)\,\mathrm{d}p_\theta + p_r\,\mathrm{d}r.$$

2. Application à la stabilité

Poincaré montre que si $\omega = a_i\,\mathrm{d}x^i$ est un invariant intégral d'ordre 1 de $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = X$, si $x(t)$ est une solution particulière et $x(t) + \xi(t)$ une solution voisine, $\xi(t)$ étant alors solution des équations variationnelles:

$$\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x(t))\,\xi^j$$

(équations fondamentales pour l'étude de la stabilité), alors $\phi(\xi, t) = a_i(x(t))\,\xi^i$ est une intégrale première des équations variationnelles: $\phi(\xi, t)$ est une intégrale première 'locale' au voisinage de toute solution particulière.

$$\varphi = \tfrac{1}{2}kp\xi - qn + (1 - \tfrac{1}{2}k)\,t\,[H(q+\xi, p+\eta) - H(q, p)]$$

est intégrale première des équations variationnelles du problème posé au 1.

Si on réduit par $H = h$, on a l'intégrale première locale

$$\bar{\phi} = \tfrac{1}{2}kp\xi - q\eta.$$

La forme de ϕ est particulièrement intéressante car elle contient un terme séculaire $(1 - \tfrac{1}{2}k)\,t\,\delta h$. Pour le problème des n corps δh n'est jamais nul car il n'y a pas de configuration d'équilibre. Supposons $k \neq 2$, et supposons que l'on étudie le voisinage d'une trajectoire $(q(t), p(t))$ bornée, comme ϕ se conserve au cours du mouvement et que $(1 - \tfrac{1}{2}k)\,t\,\delta h \to \infty$, on en déduit l'instabilité dès que $\delta h \neq 0$ et $k \neq 2$.

Ainsi toutes les solutions bornées, paramétrées par le temps, du problème des n corps sont instables: toute solution d'énergie différente s'éloigne: ce résultat est valable, par exemple, pour la configuration équilatérale de Lagrange. Le raisonnement est en défaut si $\delta h = 0$ ou $k = 2$.

Cependant si on considère le simple problème keplérien, on sait que les ellipses sont stables du point de vue géométrique: si M décrit une ellipse E, M' décrit une ellipse E' voisine et le raisonnement précédent indique que si $\delta h \neq 0$ il y a décalage horaire sur E' par rapport à E: il est donc intéressant de poser le problème de la stabilité 'orbitale', stabilité de l'arc géométrique (orbite) indépendamment du paramétrage temporel.

Supposons que M décrive T, M' décrit une orbite adjacente T', M' s'écarte de M du fait du décalage horaire si $\delta h \neq 0$. Si il y a stabilité on peut trouver sur T' M_1 voisin de M et atteint à $t' = t + \Delta t$. Nous sommes ainsi amenés à comparer deux points M et M_1 atteints à des instants différents: il faut donc considérer l'invariant complet ω^*. Faisons donc un changement temporel $\mathrm{d}t = \mu\, \mathrm{d}\tau$, ceci afin de freiner M' ou de l'accélérer afin de le comparer à M.

Par une extension du lemme on trouve que

$$\phi = (1 + \tfrac{1}{2}k)\, p\xi - (p\xi + q\eta) + (1 - \tfrac{1}{2}k)\, t\, \delta h - kh\, \Delta t$$

est intégrale première des équations variationnelles paramétrées par τ, t étant la loi horaire sur T, $t + \Delta t$ celle sur T'.

Ainsi, si il y a stabilité orbitale on sait comment se comportent les lois horaires de deux orbites voisines:

$$\Delta t / t \sim (1/k - \tfrac{1}{2})\, \mathrm{d}h/h.$$

Remarquons que l'on peut vérifier aisément cette relation pour le problème keplérien à l'aide des formules

$$n^2 a^3 = \mathrm{cte}, \qquad a = -\mu/2h, \qquad n(t - t_0) = l,$$
$$\Delta t/t \sim -\delta n/n = \tfrac{3}{2}\delta a/a = -\tfrac{3}{2}\delta h/h.$$

Par conséquent le comportement est analogue à celui du problème keplérien dans un espace de phases de dimension $6n$.

Le problème de la stabilité orbitale peut se poser de façon 'conditionnelle' (Losco, 1968). Si $q = q(t)$ est solution, $Q_\varepsilon = (1 + \varepsilon)\, q\left[(1 - (1 - \tfrac{1}{2}k)\, \varepsilon)\, t\right]$ est aussi solution. Par conséquent, toute solution particulière q peut être plongée dans un ensemble de solutions Q_ε d'énergie $(1 + k\varepsilon)\, h$: nous sommes dans les conditions d'application de la stabilité conditionnelle: si chaque solution Q_ε est stable pour les mouvements de même énergie, la solution $q = q(t)$ est orbitalement stable. L'intérêt est de se ramener à $\delta h = 0$, sans décalage horaire.

L'étude précédente étant due à l'homogénéité du potentiel, elle reste par conséquent valable pour le problème restreint de n corps soumis à leur attraction et à celle d'une masse fixe placée en O, mais par contre n'est plus valable pour le problème restreint classique des trois corps car il n'y a plus homogénéité.

3. Caractérisation de solutions particulières grâce à Γ

Levi Civita caractérise des solutions particulières d'un système canonique de hamiltonien H de la façon suivénte: si $F_1, \ldots, F_p$ sont p intégrales premières d'un système différentiel canonique de hamiltonien H, l'ensemble des points où, sur la surface d'équations $F_1 = C_1, \ldots, F_p = C_p$, l'énergie H est extrémum, est un ensemble invariant formé de solutions remarquables appelées solutions de Levi Civita. Ainsi, par exemple, pour le point matériel dans un plan soumis au champ de forces $U(r)$, les solutions circulaires sont des solutions de Levi Civita associées à l'intégrale première

$r^2\dot{\theta}=C$. On exprime analytiquement la condition d'extrémum lié de H par la condition des multiplicateurs de Lagrange:

$$\mathrm{d}H=\lambda_1\,\mathrm{d}F_1+\cdots+\lambda_p\,\mathrm{d}F_p,$$

ou mieux, grâce au produit extérieur:

$$\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}F_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}F_p=0.$$

Poincaré a introduit lui aussi des solutions remarquables: les solutions singulières, que l'on retrouve dans le livre de Whittaker (1917). Ces solutions singulières sont associées, plus généralement que les solutions de Levi Civita, à des invariants intégraux $\omega_1\ldots\omega_p$ d'ordre 1, formes différentielles invariantes de degré 1: elles sont caractérisées par le fait que le long de ces solutions singulières $\omega_1\ldots\omega_p$ sont lineéairement dépendantes:

$$\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_p=0.$$

J'ai étudié en détail ces solutions dans ma thèse (Losco, 1972) en mettant en évidence de telles solutions pour des problèmes concrets de la mécanique céleste, mais pour la première fois je vais mettre en évidence de telles solutions pour un invariant intégral, avec une interprétation concrète d'extrémum conditionnel sur $\dot{I}$: vitesse de contraction ou de dilatation.

3.1. Solutions singulières $\omega\wedge\mathrm{d}H=0$

Ces solutions vérifient $(\frac{1}{2}p\,\mathrm{d}q-\mathrm{d}(\frac{1}{2}\dot{I}))\wedge\mathrm{d}H=0$, donc:

$$\mathrm{d}(\tfrac{1}{2}\dot{I})=\tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}q+\alpha\,\mathrm{d}H.$$

Elles réalisent parmi les solutions de même énergie, de même configuration, à chaque instant, l'extrémum de $\dot{I}$ (que j'appelle vitesse de contraction),

$$\mathrm{d}H=-\lambda(\tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}q-\mathrm{d}(\tfrac{1}{2}\dot{I}))=\lambda(\tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}q+q\,\mathrm{d}q).$$

Or, $\mathrm{d}H=\dot{q}\,\mathrm{d}p-\dot{p}\,\mathrm{d}q$. Donc:

$$\mathbf{V}_i=\lambda\mathbf{M}_i, \tag{1}$$

$$\mathbf{\Gamma}_i=\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{V}_i. \tag{2}$$

(1) montre qu'il s'agit de solutions par homothétie; (2) et (1) impliquent $M_i(t)=$ $=A_i(3t+2\alpha)^{2/3}$.

Un calcul direct permet de caractériser ainsi toutes les solutions par homothétie, d'énergie nulle: ce sont les solutions de Levi Civita $\omega\wedge\mathrm{d}H=0$.

Pour le problème plan des 3 corps les seules solutions par homothétie sont les solutions équilatérales (Annexe) ou alignées. Il existe de nombreuses solutions par homothétie: Walvogel (1972) a mis en évidence récemment des solutions par homothétie pour un nombre de corps arbitraire et dans l'espace.

3.2. Solutions de Levi Civita $\omega \wedge \mathrm{d}H\mathrm{d}C=0$

(a) *Problème plan*

Soit $C=m_i\mathbf{GM}_i \wedge \mathbf{V}_i$ le moment cinétique par rapport à GZ.

$$\mathrm{d}C=(\mathbf{z} \wedge \mathbf{GM}_i)\, \mathrm{d}(m_i\mathbf{V}_i)+(m\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{z})\, \mathrm{d}(\mathbf{GM}_i).$$

Donc les solutions de Levi Civita sont telles que

$$\mathrm{d}H=\lambda(\tfrac{1}{2}P\, \mathrm{d}q+q\, \mathrm{d}p)+\mu\, \mathrm{d}C,$$

$$\dot{M}_i=\lambda M_i+\mu z \wedge M_i, \tag{3}$$

$$\dot{V}_i=\tfrac{1}{2}\lambda V_i-\mu V_i \wedge z. \tag{4}$$

(3) montre qu'il s'agit de solutions par similitude; (3) et (4) aboutissent à

$$\dot{q}=\frac{2}{3t+2\alpha}\, q+\frac{\beta}{3t+2\alpha}\, z \wedge q. \tag{5}$$

Il s'agit de solutions spirales: l'orbite est une spirale logarithmique. Ces solutions réalisent à chaque instant l'extrémum de la contraction parmi les solutions de même configuration, de même énergie, de même moment cinétique. Or de telles solutions ne peuvent exister (sauf si $\beta=0$: (3.1)), car les mouvements par similitude plans sont nécessairement kepleriens.

Ceci montre que ω est indépendant de H et C.

(b) *Problème de l'espace*

Soit $Gx_1x_2x_3$ un repère galiléen, $C_1C_2C_3$ les moments cinétiques sur ces axes, les solutions singulières sont caractérisées par:

$$0=\omega \wedge \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}C_1 \wedge \underset{\Omega}{\mathrm{d}C_2} \wedge \mathrm{d}C_3,$$

$$\dot{M}_i=\lambda M_i+(\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\mu_3 x_3)\, M_i, \tag{6}$$

$$\dot{V}_i=\tfrac{1}{2}\lambda V_i+\Omega \wedge V_i.$$

D'après (6) ce sont encore des mouvements par similitude,

$$\begin{aligned}\ddot{M}_i&=-\tfrac{1}{2}\lambda V_i+\Omega \wedge V_i=\dot{\lambda} M_i+\lambda \dot{M}_i+\dot{l} \wedge M_i+\Omega \wedge \dot{M}_i=\\ &=\dot{\lambda} M_i+\lambda^2 M_i+\lambda\Omega \wedge M_i+\dot{\Omega} \wedge M_i+\Omega \wedge \dot{M}_i.\end{aligned}$$

Donc:

$$\dot{\lambda}=-\tfrac{3}{2}\lambda^2, \qquad \lambda=2/(3t+2\alpha), \qquad (\dot{\Omega}+{}^{3}\lambda\Omega) \wedge M_i=0.$$

Si la configuration n'est pas alignée: $\dot{\Omega}+\frac{3}{2}\lambda\Omega=0$, Ω a par conséquent une direction fixe $\mathbf{z}$: $\Omega=[\beta/(3t+2\alpha)]\, z$. Or, un calcul immédiat montre que:

$$\sum m_i\mathbf{M}_i \wedge \mathbf{\Gamma}_i=\beta(3t+2\alpha)^{-2/3}\, (m_i x_i^2\mathbf{z}-\sum m_i(x_i z)\, \mathbf{x}_i+m_i(x_i z)\, \mathbf{x}_i \wedge z=0).$$

Projetons sur z:

$$0=(3t+2\alpha)^{-3/2}\,\beta\left(\sum m_i x_i^2 - m_i(x_i z)^2\right).$$

Donc soit $\beta=0$ (3.1), soit la configuration est alignée.

Montrons qu'il n'est pas possible d'avoir de tels mouvements, même en configuration alignée: Si la configuration est alignée sur Ω, comme $\dot{M}=\lambda M+\Omega\wedge M$, le mouvement est par homothétie (3.1); si la configuration n'est pas alignée sur $\mathbf{\Omega}$, prenons des axes i, j, k tels que $\mathbf{i}$ porte les points M_i, (i, j) est le plan $(\mathbf{q}, \mathbf{\Omega})$.

$$\ddot{M}_i \wedge M_i = \tfrac{1}{2}\lambda(\Omega\wedge M_i)\wedge M_i + (\Omega\wedge(\Omega\wedge M_i))\wedge M_i.$$

Un calcul rapide de $\ddot{M}_i \wedge M_i$ montre que nécessairement $\Omega=0$ ou $\theta=0$. Cette réponse négative est regrettable mais intéressante en elle-même, car elle aurait pu donner une interprétation variationnelle des solutions spirales comme réalisant une contraction maximum pour un moment cinétique et une énergie donnée à un instant t à n corps en attraction newtonienne.

3.3. Les solutions par homothétie, par similitude

Cherchons plus généralement quels sont les mouvements qui réalisent l'extrémum de $\dot{I}$ pour une énergie donnée h, une configuration q donnée à l'instant t. $\mathrm{d}\dot{I}=\mathrm{d}H+ +\beta_i\,\mathrm{d}q^i$ traduit la condition liée à satisfaire. Il suffit que $\dot{q}^i=q^i/\alpha$.

Par conséquent, si pour une configuration et une énergie donnée à t on cherche la distribution de vitesses réalisant l'extrémum de $\dot{I}$, on trouve la distribution de vitesses par homothétie.

Tous les mouvements par homothétie réalisent donc l'extrémum de $\dot{I}$ à chaque instant parmi les mouvements qui auraient la même énergie et la même configuration:

$$\mathrm{d}\dot{I}\wedge\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^n=0.$$

Par un calcul tout à fait analogue, on trouve que c'est une distribution de vitesses par similitude qui réalise à l'instant t l'extrémum de I pour h, C, q données. Tous les mouvements par similitude réalisent cet extrémum à tout instant:

$$\mathrm{d}\dot{I}\wedge\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}C\wedge\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^n=0.$$

Donc:

(a) Les solutions par rotation sont des solutions de Levi Civita réalisant l'extrémum de h pour C donné.

(b) Les solutions par homothétie réalisent l'extrémum de $\dot{I}$ pour h, q données. Seules sont de Levi Civita les solutions d'énergie nulle ($\omega\wedge\mathrm{d}H=0$).

(c) Les solutions par similitude réalisent l'extrémum de $\dot{I}$ pour h, C, q données. Seules seraient de Levi Civita des solutions spirales.

Annexe. Recherche des solutions par similitude plane pour trois corps

Carathéodory a montré en 1933 que les seules solutions par similitude planes sont les solutions de Lagrange. Nous retrouverons plus simplement ce résultat:

Posons: $Z = z_2 - z_1$, $z_3 - z_1 = aZ$. $a = \alpha + i\beta$ vérifie alors

$$\text{(E)} \qquad m_1(1+a)\left(1 - \frac{1\ldots}{|1+a|^3}\right) + m_2 a\left(1 - \frac{1}{|a|^3}\right) + m_3 a(1+a)\left(\frac{1}{|1+a|^3} - \frac{1}{|a|^3}\right) = 0.$$

Cherchons m_1, m_2, m_3 tous trois positifs satisfaisant à (E). Posons

$$A = 1 - 1/|1+a|^3, \qquad B = 1 - 1/|a|^3, \qquad C = 1/|1+a|^3 - 1/|a|^3 = B - A,$$
$$m_1(1+\alpha)\,A + m_2\alpha B + m_3(\alpha + \alpha^2 - \beta^2)\,(B - A) = 0,$$
$$m_1\beta A + m_2\beta B + m_3(\beta + 2\alpha\beta)\,(B - A) = 0.$$

Sauf lorsque $\beta = 0$ (configurations alingnées de Lagrange) et $A = B = 0$ (configuration équilatérale de Lagrange):

$$m_1 = \lambda B(B - a)\,(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$m_2 = -\lambda A(B - A)\,[(1+\alpha)^2 + \beta^2],$$
$$m_3 = \lambda AB.$$

Donc $B(B-A)$, $-A(B-A)$, AB sont tous du même signe. —A et B sont demême signe, contraire à celui de $B - A$, ce qui est impossible.

Références

Cartan, E.: 1971, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris.

Losco, L.: 1968, *Bull. Astron.* Sér. 3, **III**, Fasc. 4, 433–42.

Losco, L.: 1972, *Solutions particulières et invariants intégraux*, Thèse Besançon.

Losco, L.: 1973, *C. R. Acad. Sci. Paris* **277**, Sér. A, 323–25.

Poincaré, H.: 1957, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Dover publications, New York.

Waldvogel, J.: 1972, *Celes. Mech.* **5**, 37.

Whittaker, E. T.: 1917, *A Treatise on the Analytical Dynamics*, University Press, Cambridge, U.K.

Wintner, A.: 1941, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N. J., U.S.A.

DISCUSSION

T. Inoue: Vous avez bien trouvé la onzième intégrale première. Est-ce que c'est possible de me montrer une forme concrète de cette intégrale (dans le cas du problème des trois corps)?

L. Losco: $F = p\xi/2 - (p\xi + q\eta) + 2t\,\delta h/2$, si j'ai un mouvement particulier que je connais $q = q(t)$, $p = p(t)$, et sont petits pour que, $q + \xi$ et $p + \eta$ explorent le voisinage du mouvement particulier.

S. F. Mello: Est-ce que vous croyez qu'en changeant légèrement la formulation du problème restreint, il serait possible de servir de vos résultats pour étudier les mouvements autours de L_4 et L_5?

L. Losco: Le potentiel du problème restreint n'étant pas homogène, les résultats ne sont pas applicables.

F. Nahon: La onzième intégrablè première locale, déjà signalée par Cartain, peut servir à l'étude de l'inégalité de Sundman et à l'étude de la diffusion dans les problèmes voisins des problèmes intégrables.