SUR LES AUTOMORPHISMES DE CERTAINES STRUCTURES PRESQUE COSYMPLECTIQUES*

H. Akbar-Zadeh

(received March 1, 1964)

Introduction. Il s'agit d'étudier les automorphismes infinitésemaux (a. i.) de certaines structures presque cosymplectiques liées aux variétés finslériennes.

V_{n+1} désigne l'espace temps de configuration, W l'espace fibré des directions orientées tangentes à V_{n+1}. Dans l'étude du mouvement d'un système dynamique caractérisé par son lagrangien homogène $\mathcal{L}$ et par le tenseur force $S_{\alpha\beta}$ antisymétrique, J. Klein [3] introduit la 2-forme:

$$F = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}(x, v) dx^\alpha \wedge dx^\beta \qquad (\ell_\alpha = \partial_{\dot\alpha} \mathcal{L}) .$$

Nous démontrons que l'ensemble $(\omega = \ell_\alpha dx^\alpha, F)$ définit sur W une structure presque cosymplectique. Dans le cas où F est fermée nous étudions l'algèbre Lpc des (a.i.) de cette structure. L'algèbre horizontale HLpc associée à Lpc est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, à l'espace (de dimension infinie) des 1-formes basiques fermées; au sous-espace des 1-formes basiques homologues à zéro correspond un idéal $\overset{\circ}{H}$Lpc tel que HLpc/$\overset{\circ}{H}$Lpc soit abélien.

Dans le cas où la variété V_{n+1} est compacte, $\overset{\circ}{H}$Lpc est isomorphe à l'algèbre de Lie définie par la "parenthèse de

* Exposé fait au séminaire dirigé par M. Lichnerowicz au Collège de France, 1962-1963.

Canad. Math. Bull. vol. 8, no. 1, February 1965

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

Poisson" sur l'espace des fonctions basiques vérifiant les conditions de normalisation. Enfin nous établirons pour l'algèbre HKpc de dimensions finie le théorème de réductivité de M. Lichnerowicz [5].

1. Connexions S-finslériennes. Soit V_{n+1} une variété différentiable de dimension $n+1$ et de classe C^{∞}. Nous désignerons par V l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_{n+1}, par W l'espace fibré des directions orientées tangentes à V_{n+1}, par π, η et p respectivement les applications canoniques de $V \to V_{n+1}$, de $V \to W$ et de $W \to V_{n+1}$. Entre π, η et p vient la relation

$$\pi = p \circ \eta .$$

Soit U un voisinage de V_{n+1}; aux coordonnées locales $(x^{\alpha})(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$ d'un point $x \in U$, nous faisons correspondre les coordonnées (x^{α}, v^{α}) du point $z \in \pi^{-1}(U)(\pi z = x)$ où les v^{α} sont les composantes par rapport au repère naturel d'origine x du vecteur de $T\pi z$ défini par z. Une structure de variété finslérienne sur V_{n+1} est définie ici par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, v)(>0)$ sur V, positivement homogène de degré 1 en v tel que le tenseur

$$(1.1) \qquad g_{\alpha\beta}(x, v) = \partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}^2\right) \qquad \left(\partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right)$$

soit partout défini positif. Etant donnée une 2-forme sur W définie par:

$$(1.2) \qquad S = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}(x, v)\, dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$$

où $S_{\alpha\beta}$ est un tenseur antisymétrique homogène de degré 0 en v. A cette 2-forme est associée la 1-forme définie par:

$$(1.3) \qquad X = -i(v)S = S_{\alpha\beta} v^{\beta} dx^{\alpha} ,$$

où i désigne l'opérateur du produit intérieur, d, où

$$i(v)X = 0 .$$

Soit $\bar{\omega}$ une connexion linéaire régulière sur $W[1]$, nous désignerons encore par $\bar{\omega}$ son image inverse sur V par η, rapportée au corepère $(dx^\alpha, \bar{\nabla} v^\alpha)$ elle s'écrit

$$(1.4) \qquad \bar{\omega}^\alpha_\beta = \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\gamma + T^\alpha_{\beta\gamma}\, \bar{\nabla} v^\gamma \qquad (T^\alpha_{\beta\gamma}\, v^\gamma = 0)$$

où $\bar{\nabla}$ désigne la dérivée covariante dans $\bar{\omega}$. Les coefficients $\bar{\Gamma}$ et T sont respectivement homogènes de degré 0 et -1 en v. La forme de torsion de cette connexion s'écrit

$$(1.5) \quad \Sigma^\lambda = \bar{\omega}^\lambda_\beta \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} S^\lambda_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + T^\lambda_{\alpha\beta}\, \bar{\nabla} V^\beta \wedge dx^\alpha$$

La connexion $\bar{\omega}$ sera dite S-finslérienne[1] si elle satisfait aux conditions suivantes:

$$\text{(I)} \quad \bar{\nabla} g_{\alpha\beta} = 0 \quad ,$$

$$\text{(II)} \quad T^\lambda_{\alpha\beta} = T^\lambda_{\beta\alpha} \quad ,$$

$$\text{(III)} \quad S^\lambda_{\alpha\beta} = -\ell^\lambda\, S_{\alpha\beta} \quad . \qquad (\ell = v/\mathcal{L})$$

Des conditions I et II nous obtenons le tenseur T:

$$(1.6) \qquad T_{\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_{\dot{\beta}}\, g_{\lambda\alpha} \qquad (T_{\lambda\alpha\beta} = g_{\lambda\gamma}\, T^\gamma_{\alpha\beta}) .$$

Ainsi T coincide avec le tenseur de torsion de la connexion finslérienne associée à $g[2]$ et les coefficients $\bar{\Gamma}$ sont déterminés au moyen des coefficients $\overset{*}{\Gamma}$ de la connexion finslérienne et du tenseur S par:

---

1) La détermination de cette connexion est due à J. Klein. Voir [3] p. 50-55.

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} &+ \frac{1}{2} X_\lambda (T^\lambda_{\mu\gamma} T^\mu_{\alpha\beta} + T^\lambda_{\mu\beta} T^\mu_{\gamma\alpha} - T^\lambda_{\mu\alpha} T^\mu_{\beta\gamma}) \\
&+ \frac{1}{2} X_\lambda (\ell_\gamma T^\lambda_{\alpha\beta} + \ell_\beta T^\lambda_{\gamma\alpha} - \ell_\alpha T^\lambda_{\beta\gamma}) \\
&- \frac{1}{2} \mathcal{L} (S_{\gamma\lambda} T^\lambda_{\alpha\beta} + S_{\beta\lambda} T^\lambda_{\gamma\alpha} - S_{\alpha\lambda} T^\lambda_{\beta\gamma}) \\
&+ \frac{1}{2} (\ell_\alpha S_{\beta\gamma} + \ell_\beta S_{\gamma\alpha} - \ell_\gamma S_{\alpha\beta})
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

où nous avons posé

$$
\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma} \bar{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma}, \qquad \overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma} \overset{*}{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma}
$$

et les X_λ sont les composantes de la 1-forme X par rapport au corepère naturel (dx^λ) de la base.

2. <u>Structure presque cosymplectique sur</u> W. Au champ canonique sur W de vecteurs unitaires $\ell = v/\mathcal{L}$ nous associons la 1-forme

$$
\omega = \ell_\alpha dx^\alpha \tag{2.1}
$$

considérons la 2-forme à valeurs scalaires sur W définie par[2]

$$
F = d\omega + S = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta . \tag{2.2}
$$

Nous allons montrer que l'ensemble (ω, F) définit sur W une structure de variété presque cosymplectique. En effet désignons par $\bar{\nabla}$ la dérivée covariante dans la connexion finslérienne et posons

$$
\bar{\beta}_\alpha = \bar{\nabla} \ell_\alpha \qquad \beta_\alpha = \nabla \ell_\alpha \tag{2.3}
$$

---

2) F est la 2-forme fondamentale de la mécanique analytique où $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur-force; voir J. Klein [3], la 1-forme ω est l'invariant intégral relatif d'E. Cartan [2] p. 8-9.

ℓ étant unitaire les $\bar{\beta}_\alpha$ et β_α satisfont:

$$\bar{\beta}_\alpha \ell^\alpha = 0 , \qquad \beta_\alpha \ell^\alpha = 0$$

de (1.7) il vient

$$(2.4) \quad \bar{\beta}_\alpha = \beta_\alpha + \frac{1}{2} S_{\gamma\alpha} dx^\gamma + X_\lambda T^\lambda_{\alpha\gamma} dx^\gamma - \frac{1}{2\mathcal{L}} (X_\gamma \ell_\alpha + \ell_\gamma X_\alpha) dx^\gamma .$$

Les coefficients $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ de la connexion finslérienne étant symétriques par rapport aux deux indices inférieurs nous obtenons

$$(2.5) \qquad d\omega = d\ell_\alpha \wedge dx^\alpha = \beta_\alpha \wedge dx^\alpha ,$$

compte-tenu de (2.4) la 2-forme F, s'écrit

$$(2.6) \qquad F = \bar{\beta}_\alpha \wedge dx^\alpha .$$

L'ensemble $(dx^\alpha, \beta^\alpha)$ définit un système de générateurs pour les 1-formes de l'espace vectoriel tangent à W en $y \in W$ et il en est de même pour l'ensemble $(dx^\alpha, \bar{\beta}^\alpha)$ car d'après (2.4) les restrictions des $\bar{\beta}_\alpha$ et des β_α à la fibre $p^{-1}(x)$ sont identiques. A chaque $y \in W$ nous attachons un repère orthonormé de la base (e_o, e_a) $(a = 1, 2, \ldots, n)$ tel que $e_o = \ell$ nous avons

$$(2.7) \quad \begin{array}{llll} \ell_o = 1 & \bar{\beta}_o = 0 & \beta_o = 0 & \\ \ell_a = 0 & \bar{\beta}_a = \omega_{ao} & \beta_a = \omega_{ao} & (a = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

Par rapport à ce repère la métrique de V_{n+1} s'écrit

$$ds^2 = (\omega_o)^2 + \sum_1^n (\omega_a)^2$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

et la 1-forme ω, définie par (2.1), s'écrit dans ce repère

$$\omega = \sum_{\alpha=0}^{n} \ell_\alpha \omega_\alpha = \ell_o \omega_o + \sum_{a=1}^{n} \ell_a \omega_a = \omega_o .$$

Ainsi la métrique de V_{n+1} devient

$$(2.8) \qquad ds^2 = (\omega)^2 + \sum_1^n (\omega_a)^2 .$$

D'autre part la 2-forme F s'écrit

$$(2.9) \qquad F = \sum_{\alpha=0}^{n} \beta_\alpha \wedge \omega_\alpha = \sum_{a=1}^{n} \bar{\beta}_a \wedge \omega_a ,$$

la matrice associée à cette 2-forme est:

$$(2.10) \qquad \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

où E_n est la matrice unité d'ordre n. Il en résulte que F est de rang $2n$ sur W et $\omega \wedge F^n$ est partout différent de zéro. Ainsi l'ensemble (ω, F) définit sur W une structure presque cosymplectique. Nous poserons

$$\bar{\beta}_a = \bar{\omega}_{a*} \qquad (a* = a + n)$$

la forme F s'écrit

$$F = \Sigma \bar{\omega}_{a*} \wedge \omega_a .$$

Munissons l'espace W de la métrique riemannienne

$$(2.11) \qquad d\bar{\sigma}^2 = (\omega)^2 + \sum_1^n (\omega_a)^2 + \sum_{n+1}^{2n} (\bar{\omega}_{a*})^2 ,$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

complétons la base (e_o, e_a) par n vecteurs $\bar{e}_{a*}$ de façon que l'ensemble $(e_o, e_a, \bar{e}_{a*})$ définisse une base orthonormée, dans la métrique (2.11), de l'espace vectoriel euclidien tangent à W en $y \in W$. Nous avons alors

$$\omega_A(e_B) = \delta_{AB} \qquad (\delta \text{ est le symbole de Kronecker})$$

où A et B prennent les valeurs $(0, 1, 2 \ldots 2n)$. Il en résulte

$$\text{(2.12)} \qquad i(e_o)\omega = 1$$

$$\text{(2.13)} \qquad i(e_o)F = 0 .$$

En chaque point $y \in W$ l'équation $\omega = 0$ définit un sous-espace Π de Ty de dimension $2n$. Soit $\bar{\Phi} = \sum_1^n (\omega_a)^2 + \sum_{n+1}^{2n} (\omega_{a*})^2$ la métrique induite sur Π, d'après (2.10), il est clair que F est échangeable avec $\bar{\Phi}$ par conséquent induit sur Π une structure que nous appelons presque hermitienne. Cette structure sera dite presque kahlérienne si, de plus, F est fermée. La $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure de F est

$$\text{(2.14)} \qquad F^n = n!\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \, . \, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n \wedge \bar{\beta}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\beta}_n$$

d'où

$$\text{(2.15)} \qquad \omega \wedge \frac{F^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \, . \, \omega \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \wedge \bar{\beta}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\beta}_n$$

Posons

$$\text{(2.16)} \qquad \eta = \omega \wedge \frac{F^n}{n!} .$$

3. <u>Structure Pfaffienne.</u> Par rapport au repère orthonormé $(e_o; e_a)$ de la base, la 2-forme $d\omega$, définite par

(2.5), peut être mise sous la forme:

$$d\omega = \sum_{a=1}^{n} \beta_a \wedge \omega_a . \tag{3.1}$$

La matrice associée à $d\omega$ est donc de la forme (2.10), il en résulte que $d\omega$ est de rang $2n$ sur W et $\omega \wedge (d\omega)^n$ est partout différent de zéro, ceci prouve que l'ensemble $(\omega, d\omega)$ définit sur W une structure pfaffienne. Si nous munissons maintenant W de la métrique définie par:

$$d\sigma^2 = (\omega)^2 + \sum_{1}^{n} (\omega_a)^2 + \sum_{n+1}^{2n} (\omega_{a*})^2 \tag{3.2}$$

où nous avons posé $\omega_{a*} = \beta_a (a* = a + n)$, $d\omega$ s'écrit:

$$d\omega = \sum \omega_{a*} \wedge \omega_a . \tag{3.3}$$

Comme dans le paragraphe précédent nous complétons la base (e_o, e_a) par n vecteurs e_{a*} de manière que l'ensemble (e_o, e_a, e_{a*}) définisse une base orthonormée, dans la métrique (3.2), de l'espace vectoriel tangent à W en $y \in W$ nous avons alors

$$\begin{aligned} i(e_o)\omega &= 1 \\ i(e_o)d\omega &= 0 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Soit Π le sous-espace de Ty, de dimension $2n$, défini par l'équation $\omega = 0$, désignons par ϕ la métrique induite sur Π par (3.2), on voit alors que $d\omega$ est échangeable avec ϕ, par suite détermine sur Π une structure que nous appellerons presque kahlérienne et nous avons:

$$\omega \wedge \frac{(d\omega)^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} . \omega \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n . \tag{3.5}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

En reportant l'expression de $\bar{\beta}_a$, définie par (2.4), dans (2.15), compte tenu de (2.7) nous obtenons

$$(3.6) \qquad \eta = \omega \wedge \frac{F^n}{n!} = \omega \wedge \frac{(d\omega)^n}{n!}$$

Si $S = 0$ la structure presque cosymplectique (ω, F) coincide avec la structure pfaffienne $(\omega, d\omega)$.

4. Cas où F est fermée. Dans les paragraphes qui précèdent nous avons montré qu'il existe un champ canonique de vecteurs sur W satisfaisant aux relations (2.12), (2.13) et (3.4). Désignons par E ce champ de vecteurs et écrivons ces relations

$$(4.1) \qquad i(E)\omega = 1$$

$$(4.2) \qquad i(E)F = i(E)d\omega = 0 .$$

L'équation $\omega = 0$ définit sur W un champ de $2n$-plans Π appelés "horizontaux". Un champ de vecteurs Z sur W sera dit horizontal si pour tout $y \in W \to Zy \in \Pi y$, c'est-à-dire $\omega(Z) = 0$. Soit K l'anneau des fonctions à valeurs réelles sur W, tout champ de vecteurs X sur W peut s'écrire

$$(4.4) \qquad X = f.E + HX \qquad (i(X)\omega = f \in K) .$$

HX est la partie horizontale de X, fE sera appelée la partie "verticale" de X. Nous désignerons par $L(X)$ l'opérateur de la dérivée de Lie par X, rappelons les formules suivantes [7]:

$$(4.5) \qquad L(X) = i(X)d + di(X)$$

$$(4.6) \qquad i([X,Y])\Phi = L(X)i(Y)\Phi - i(Y)L(X)\Phi$$

où Φ est une forme différentielle et X, Y sont deux champs de vecteurs. Une forme différentielle ψ sur W sera dite "semi-basique" si $i(E)\psi = 0$, elle sera dite "basique" si de plus elle est invariante par E. Nous désignerons par K' l'anneau des fonctions basiques sur W. Dans la suite nous supposons que F est fermée:

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

(4.7) $$dF = 0 .$$

Ainsi S est fermée. F, $d\omega$ et S sont donc des formes basiques. Considérons l'application:

(4.8) $$\mu : HX \to \xi = -i(HX)F .$$

ξ étant manifestement semi-basique, de plus nous avons

$$i(HX)\eta = \omega \wedge \xi \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Mais η est partout différent de zéro, si $\xi = 0$ on a nécessairement $HX = 0$. Ainsi μ définit un isomorphisme des champs de vecteurs horizontaux sur l'espace des 1-formes semi-basiques. Soit y un champ de vecteurs horizontaux invariants par E, de la formule (4.6) il résulte

$$i([E,y])F = i(L(E)y)F = L(E)i(y)F - i(y)L(E)F = L(E)i(y)F = 0 ,$$

d'où $i(y)F$ est basique. Inversement supposons que $i(y)F$ soit basique où y est horizontal alors $i([E,y])F = 0$, d'autre part $i([E,y])\omega = 0$, d'où $[E,y] = 0$, ainsi y est invariant par E. Il en résulte que l'isomorphisme μ induit un isomorphisme de K'-module des champs de vecteurs horizontaux invariants par E sur le K'-module des 1-formes basiques. Enfine nous remarquons que ω, n'étant pas fermée le crochet de deux champs de vecteurs horizontaux n'est pas horizontal.

5. Automorphismes.

A. Un champ de vecteurs X sur W est un automorphisme infinitésimal (a. i.) de la structure presque cosymplectique $(\omega, F = d\omega + S)$ $(dF = 0)$ si:

(5.1) $$L(X)\omega = 0$$

(5.2) $$L(X)F = 0 .$$

Compte tenu de la décomposition de X, les relations précédentes s'écrivent

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

$$(5.1)' \qquad i(HX)d\omega + df = 0 ,$$

$$(5.2)' \qquad di(HX)F = 0 .$$

En multipliant les deux membres de (5.1)' par $i(E)$, nous voyons que $f \in K'$; en faisant intervenir l'isomorphisme μ nous avons

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} \mu(HX) &= df - i(HX)S , \\ di(HX)S &= 0 . \end{aligned}$$

Inversement la relation (5.3) prouve que $X = fE + HX$ est un (a.i.) de la structure. Ainsi pour qu'un champ de vecteurs X sur W définisse un (a.i.) de la structure presque cosymplectique envisagée, il faut et il suffit qu'il satisfasse à (5.3). Il est clair que $\mu(HX)$ est une 1-forme basique fermée. Nous désignons par Lpc l'algèbre de Lie des (a.i.) de cette structure. Soient X et Y deux éléments de Lpc;

$$X = fE + HX , \quad Y = gE + HY , \quad f, g \in K' ;$$

calculons le crochet:

$$[X, Y] = [fE, gE] + [fE, HY] + [HX, gE] + [HX, HY] ,$$

de la relation (4.6) il résulte

$$i([fE, gE])\omega = 0 , \qquad i([fE, gE])F = 0 ,$$

d'où

$$[fE, gE] = 0 .$$

Nous obtenons de même:

$$[fE, HY] = -(i(HY)df)E , \quad [HX, gE] = (i(HX)dg)E$$

où

$$(5.4) \qquad i(HX)dg = -i(HY)df \in K'$$

et enfin

$$[HX, HY] = (i(HY)df)E + H[HX, HY]$$

où $H[HX, HY]$ est la partie horizontale de $[HX, HY]$. Ainsi $[X, Y]$ s'écrit

$$(5.5) \qquad [X, Y] = (i(HX)dg)E + H[HX, HY]$$

on en déduit

$$(5.6) \qquad H[X, Y] = H[HX, HY] .$$

B. Soit H le projecteur

$$H : X \in Lpc \to HX = x .$$

Nous désignerons par $HLpc$ le K'-module engendré par la partie horizontale de Lpc.

DÉFINITION. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux éléments de</u> Lpc, $x = HX$ <u>et</u> $y = HY \in HLpc$ <u>nous appelons accolade</u> $\{x, y\}$ <u>dans</u> $HLpc$ <u>l'expression</u>:

$$(5.7) \qquad \{x, y\} \overset{\text{déf}}{=} H[X, Y] .$$

L'accolade reste inchangée si nous remplaçons X et Y par X' et $Y' \in Lpc$ tels que $HX' = HX$ et $HY' = HY$. En effet nous obtenons d'après (5.6):

$$H[X, Y] = H[HX, HY] = H[HX', HY'] = H[X', Y'] .$$

LEMME. <u>L'opération</u> $x, y \in HLpc \to \{x, y\}$ <u>définit dans</u> $HLpc$ <u>une structure d'algèbre de Lie.</u>

Ecrivons l'identité de Jacobi pour X, Y, et $Z \in Lpc$:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

projectons cette relation par H, en tenant compte de la définition (5.7) nous avons pour le premier terme

$$H[X, [Y, Z]] = \{x, H[Y, Z]\} = \{x, \{y, z\}\}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

et il en est de même pour les deux autres termes, d'où:

$$\{x, \{y,z\}\} + \{y, \{z,x\}\} + \{z, \{x,y\}\} = 0 .$$

Appelons HLpc l'algèbre horizontale associée à Lpc. Soit M l'espace des 1-formes basiques fermées. Nous avons montré que HLpc est, en tant qu'espace vectoriel, isomorphe à M. Soit $x = HX$, $y = HY \in$ HLpc, nous avons:

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} \mu(\{x,y\}) &= -i(\{x,y\})F = -i(H[X,Y])F \\ &= -i(H[HX,HY])F = -i([HX,HY])F = dF(HX,HY) . \end{aligned}$$

Ainsi $\mu(\{x,y\})$ est une 1-forme basique homologue à zéro. Désignons par $\overset{o}{H}$Lpc la sous-algèbre des vecteurs dont l'image par μ est homologue à zéro, la relation précédente prouve que $\overset{o}{H}$Lpc est un idéal de HLpc tel que HLpc/$\overset{o}{H}$Lpc soit abélien.

THÉORÈME. Soit Lpc l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de la structure presque cosymplectique $(\omega;F)(dF=0)$. Soit HLpc l'algèbre horizontale associée à Lpc. HLpc est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel à l'espace M (de dimension infinie) des 1-formes basiques fermées; au sous-espace $\overset{o}{M}$ des 1-formes basiques homologues à zéro correspond un idéal $\overset{o}{H}$Lpc de HLpc tel que HLpc/$\overset{o}{H}$Lpc soit abélien.

6. Parenthèse de Poisson. Soient X et $Y \in$ Lpc, $x = HX$, $y = HY \in$ HLpc nous avons

$$\mu(x) = df - i(x)S$$

$$\mu(y) = dg - i(y)S$$

où $\mu(x)$ et $\mu(y)$ sont des 1-formes basiques fermées. Si $x, y \in \overset{o}{H}$Lpc, alors $\mu(x)$ et $\mu(y)$ sont homologues à zéro, posons:

$$i(x)S = d\sigma x \qquad f - \sigma x = \Phi$$

$$i(y)S = d\sigma y \qquad g - \sigma y = \psi$$

où Φ et $\psi \in K'$:

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

$$\mu(x) = d\phi, \qquad \mu(y) = d\psi .$$

Ainsi, d'après (5.8), à l'accolade $\{x,y\} \in \overset{\circ}{H}Lpc$ correspond la fonction $F(x,y)$. Nous appelons "parenthèse de Poisson" de ϕ et ψ l'expression:

$$(6.1) \qquad (\phi, \psi) = F(x,y) .$$

Sur l'anneau des fonctions basiques nous définissons une relation d'équivalence:

deux fonctions basiques seront dites équivalentes si elles ne diffèrent que par une constante. Soit N l'espace des classes des fonctions basiques. Si ϕ et ψ sont deux représentants des classes $\{\phi\}$ et $\{\psi\}$ alors (ϕ,ψ) est un représentant de la classe $\{(\phi,\psi)\}$ qui correspond à l'algèbre de Lie induite sur N par

$$\{(\phi,\psi)\} = (\{\phi\}, \{\psi\})$$

THÉORÈME. L'algèbre de Lie $HLpc$ est isomorphe à l'algèbre de Lie induite sur l'espace N des classes des fonctions basiques, définies à une constante additive près, par la parenthèse de Poisson de la structure presque cosymplectique.

7. Cas où V_{n+1} est compacte. Soient $x, y \in \overset{\circ}{H}Lpc$ et $\mu(x) = d\phi$, $\mu(y) = d\psi$ $(\phi, \psi \in K')$ à $\{x,y\}$ correspond la parenthèse:

$$(\phi, \psi) = F(x,y) = -i(x)i(y)F = i(x)d\psi ,$$

d'où

$$(\phi,\psi)\frac{F^n}{n!} = (i(x)d\psi)\frac{F^n}{n!} = i(x)(d\psi \wedge \frac{F^n}{n!}) + d\psi \wedge i(x)\frac{F^n}{n!}$$

$$= d\psi \wedge i(x)F \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} = d\phi \wedge d\psi \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} ;$$

multiplions extérieurement les deux membres par ω nous obtenons

$$(\Phi, \psi)\eta = d\Phi \wedge d\psi \wedge \omega \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} .$$

D'autre part considérons la 2n-forme

$$(7.1) \qquad \alpha = \Phi d\psi \wedge \omega \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

sa différentielle est

$$d\alpha = d\Phi \wedge d\psi \wedge \omega \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} - \Phi d\psi \wedge \frac{F^{n}}{(n-1)!} + \Phi d\psi \wedge S \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Mais le deuxième terme du second membre est 0, puisque est basique et il en est de meme du dernier terme car S est de la forme:

$$S = \frac{1}{2} S_{ab}\, \omega_a \wedge \omega_b \qquad (a, b = 1, 2 \ldots n)$$

et F^{n-1} est de degré $n-1$ en ω_a; ainsi

$$(7.2) \qquad (\Phi, \psi)\eta = d\alpha$$

LEMME. $(\Phi, \psi)\eta$ <u>est une</u> $(2n+1)$-<u>forme homologue à zéro sur</u> W. Supposons V_{n+1} compacte, dans chaque classe $\{\Phi\}$ choisissons la fonction Φ de façon que

$$\int_W \Phi\eta = 0 .$$

Nous dirons que Φ est normalisée. Si Φ et ψ sont deux fonctions normalisées, nous avons d'après le lemme précédent

$$\int_W (\Phi, \psi)\eta = 0 .$$

THÉORÈME. <u>Si</u> V_{n+1} <u>est une variété compacte, l'algèbre de Lie</u> HL_{pc} <u>est isomorphe par</u> $\mu(x) = d\Phi$ <u>à l'algèbre de Lie définie par la parenthèse de Poisson sur l'espace</u> N <u>des fonctions basiques vérifiant la condition de normalisation.</u>

8. Réductivité. Soient x et y deux éléments de $\overset{c}{\underset{o}{H}}Lpc$, $\mu(x) = d\underset{\sim}{\phi}$ et $\mu(y) = d\psi$ où $\underset{\sim}{\phi}$ et $\psi \in N$. Sur $\overset{c}{H}Lpc$ nous définissons un produit scalaire:

$$A(x, y) = \int_W \underset{\sim}{\phi} \cdot \psi \eta . \tag{8.1}$$

$A(x, y)$ est une forme bilinéaire sur $\overset{c}{H}Lpc$ telle que $A(x, x) \geq 0$ et $A(x, x) = 0$ entraine $\underset{\sim}{\phi} = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Soit $z \in HLpc$, en vertu de (5.8), à l'accolade $\{z, x\}$ correspond par μ la fonction basique:

$$F(z, x) = -i(z)i(x)F = i(z)d\underset{\sim}{\phi} .$$

Ainsi nous obtenons

$$A(\{z, x\}, y) + A(x, \{z, y\}) = \int_W i(z)d(\underset{\sim}{\phi}, \psi)\eta . \tag{8.2}$$

Nous allons montrer que l'expression sous le signe d'intégration est homologue à zéro. A cet effet considérons

$$i(z)\left(d(\underset{\sim}{\phi}\psi) \wedge \omega \wedge \frac{F^n}{n!}\right) = i(z)d(\underset{\sim}{\phi}, \psi)\eta + d(\underset{\sim}{\phi}\psi) \wedge \omega \wedge i(z)F \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Mais le premier membre est nul, ainsi

$$i(z)d(\underset{\sim}{\phi}\psi)\eta = -d(\underset{\sim}{\phi}\psi) \wedge \omega \wedge i(z)F \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} . \tag{8.3}$$

D'autre part considérons la 2n-forme

$$\beta = (\underset{\sim}{\phi}\psi) \wedge \omega \wedge i(z) \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} , \tag{8.4}$$

$i(z)F$ étant une 1-forme basique fermée, on a

$$d\beta = d(\underset{\sim}{\phi}\psi) \wedge \omega \wedge i(z)F \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} + (\underset{\sim}{\phi}\psi)i(z)F \wedge \frac{F^n}{(n-1)!}$$

$$- (\underset{\sim}{\phi}\psi)i(z)F \wedge S \wedge \frac{F^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Les deux derniers termes s'annulent donc d'après (8.3), nous obtenons:

$$i(z)d(\Phi\psi)\eta = -d\beta$$

La variété V_{n+1} étant compacte, la relation (8.2) s'écrit

$$(8.5) \qquad A(\{z,x\},y) + A(x,\{z,y\}) = 0 .$$

Le produit scalaire défini sur HLpc est donc invariant par la représentation adjointe de HLpc. Soit Kpc l'algèbre de Lie de dimension finie formée par les transformations infinitésimales presque cosymplectiques, W étant compact, Kpc définit un groupe de Lie de transformations presque cosymplectiques. Soit HKpc l'algèbre horizontale associée à Kpc et soit

$$\overset{o}{H}Kpc = HKpc \cap \overset{o}{H}Lpc ,$$

$\overset{o}{H}$Kpc est un idéal de HKpc, ad(HKpc) opérant sur $\overset{o}{H}$Kpc et laisse invariant le produit scalaire. Soit P un sous-espace de $\overset{o}{H}$Kpc invariant par ad(HKpc) soit Q l'orthocomplément de P au sens de produit scalaire précédent. Q est aussi invariant par ad(HKpc). Ainsi ad(HKpc) définit sur $\overset{o}{H}$Kpc une représentation et cette représentation est complément réductible. En particulier nous pouvons prendre pour HKpc, $\overset{o}{H}$Kpc lui-même ainsi un idéal quelconque de $\overset{o}{H}$Kpc admet un idéal supplémentaire.

THÉORÈME DE LICHNEROWICZ. Supposons V_{n+1} compacte, si Kpc est l'algèbre de Lie de dimension finie des transformations infinitésimales presque cosymplectiques, si HKpc est l'algèbre horizontale associée à Kpc et si $\overset{o}{H}$Kpc = HKpc $\cap$ $\overset{o}{H}$Lpc alors, ad(HKpc) opérant sur l'idéal $\overset{o}{H}$Kpc définit une représentation complètement réductible. En particulier $\overset{o}{H}$Kpc est une algèbre de Lie réductive [5], [6].

9. Cas particulier. Soit Kpc l'algèbre de Lie de dimension finie des (t.i.) presque cosymplectiques. Soit LE l'espace vectoriel engendré par la partie verticale de Kpc. Considérons le sous-espace de Kpc défini par LE + $\overset{o}{H}$Kpc, d'après (5.5) et (5.7), il est clair que c'est une sous-algèbre de Lie de Kpc.

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

Supposons que l'algèbre $LE + \overset{\circ}{HKpc}$ soit transitive sur W. Soit

$$\mu : \begin{cases} x \in \overset{\circ}{HKpc} \to \mu(x) = \xi \\ y \in HKpc \to \mu(y) = d\psi \end{cases}$$

où ξ est une 1-forme basique fermée et $\psi \in N$ on a alors:

$$\mu(\{x, y\}) = dF(x, y) = -di(y)\xi .$$

Pour que x appartienne au centralisateur de $\overset{\circ}{HKpc}$ dans HKpc, il faut et il suffit que $\forall\, y \in \overset{\circ}{HKpc}$, $i(y)\xi$ soit constante, or

$$-i(y)\xi = i(y)i(x)F = -i(x)i(y)F = i(x)d\psi = \underline{cte}$$

W étant compact, ψ atteint un extremum pour lequel $d\psi = 0$. Ainsi $i(y)\xi = 0$ $\forall y \in \overset{\circ}{HKpc}$ d'où

$$\forall\, Y \in LE + \overset{\circ}{HKpc} \Rightarrow i(Y)\xi = 0 .$$

D'autre part $LE + \overset{\circ}{HKpc}$ étant transitive sur W alors $i(Y)\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Le centralisateur de $\overset{\circ}{HKpc}$ dans HKpc qui est aussi le centre de $\overset{\circ}{HKpc}$ se réduit à zéro, comme $\overset{\circ}{HKpc}$ est réductive, alors elle est semi-simple.

COROLLAIRE. Si l'algèbre de Lie $LE + \overset{\circ}{HKpc}$ est transitive sur W alors $\overset{\circ}{HKpc}$ est semi-simple.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Akbar-Zadeh, Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, Ann. E.N.S. (1963).

2. E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris, Hermann (1934).

3. J. Klein, Espaces variationnels et mécaniques, Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 1-124.

4. P. Libermann, Colloque de Géométrie différentielle, Bruxelles 1959.

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press

5. A. Lichnerowicz, Sur la réductivité de certaines algèbres d'automorphismes, C.-R. Acad. Sc. t.253, p.1302-1304 (1961).

6. ________, Cours du Collège de France 1961-1962.

7. ________, Géométrie des groupes de transformations, Paris, Dunod 1958.

49 Ave. de la Maladrerie
Poissy (S et O)
France

https://doi.org/10.4153/CMB-1965-007-9 Published online by Cambridge University Press