Can. J. Math., Vol. XXXI, No. 3, 1979, pp. 496–523

SUR LA CLASSIFICATION DES SYMETRIES DES C^*-ALGEBRES UHF

TH.FACK ET O. MARECHAL

Cet article contient une classification détaillée des symétries des C^*-algèbres uniformément hyperfinies. Soient $\mathscr{D} = \bigotimes_{n\geq 1} K_n$, et $\theta = \bigotimes_{n\geq 1} \theta_n$ une symétrie de $\mathscr{D}$; on associe à θ un entier généralisé $N(\theta)$, un réel Tr $(\theta) \in [0, 1]$, et on a les résultats suivants:

Il existe une symétrie unique à conjugaison près qui possède une suite centrale (U_n) d'unitaires vérifiant $||\theta(U_n) + U_n|| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Cette symétrie est la seule dont l'algèbre des points fixes est uniformément hyperfinie.

Si θ et θ' sont extérieurs dans la représentation traciale (ce qui est équivalent à Tr $(\theta) = 0$), alors θ est extérieurement conjugué à θ' si et seulement si $N(\theta)$ est équivalent à $N(\theta')$ (cf. [**5**, p. 196], pour la définition de l'équivalence). Dans le cas général, θ et θ' sont extérieurement conjugués si et seulement si $(N(\theta)$, Tr $(\theta))$ est équivalent à $(N(\theta')$, Tr $(\theta'))$ (cf. 5.1 pour la signification de l'équivalence).

On dira que θ a la propriété $(\mathscr{U})$ s'il existe une unitaire U de $\mathscr{D}$ tel que $\theta(U) = -U$.

Si θ et θ' n'ont pas la propriété $(\mathscr{U})$, alors θ est conjugué à θ' si et seulement si $N(\theta) = N(\theta')$ et Tr $(\theta) =$ Tr (θ'). En particulier, si θ et θ' sont extérieurs dans la représentation traciale, alors ils sont conjugués si et seulement si $N(\theta) = N(\theta')$. Si θ et θ' ont la propriété $(\mathscr{U})$, alors θ est conjugué à θ' si et seulement si θ est extérieurement conjugué à θ'.

Si θ et θ' sont extérieurs dans la représentation traciale, alors θ est extérieurement conjugué à θ' si et seulement si le produit croisé $C^*(\mathscr{D}, \theta)$ est isomorphe à $C^*(\mathscr{D}, \theta')$.

Les résultats obtenus ici dans le cadre d'une C^*-algèbre $\mathscr{D}$ uniformément hyperfinie sont très différents de ceux obtenus par A. Connes dans le cadre du facteur hyperfini **R** de type II_1. En particulier (cf. [**3**]) il n'existe dans **R** qu'une seule symétrie extérieure à conjugaison près, alors qu'il existe dans $\mathscr{D}$ une infinité continue de classes de conjugaison de symétries extérieures. D'après [**3**] et [**4**], Aut (**R**) ne possède qu'une infinité dénombrable de classes de conjugaison extérieure, alors que Aut $(\mathscr{D})$ en possède une infinité continue. De plus, il est impossible de construire "effectivement" une bijection entre

Reçu le 5 juillet, 1977. A la suite de la disparition brutale d'Odile Marechal, le premier auteur a pris seul la responsabilité de la correction des epreuves de ce travail commun.

l'ensemble des classes de conjugaison extérieure d'éléments de Aut ($\mathscr{D}$) et l'ensemble des nombres réels.

1. Notations et préliminaires. On appelle *symétrie* d'une C^*-algèbre tout automorphisme de carré 1 de cette C^*-algèbre. Tous les résultats établis ici ne concernent que les symétries des C^*-algèbres UHF qui sont produits tensoriels infinis au sens de 1.2.

1.1. Pour tout entier $n \geqq 1$, soit $F_n = M_n(\mathbf{C}) = \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ le facteur de type I_n. Si $\mathscr{Q} = (q_1, q_2, \ldots)$ est une suite d'entiers > 1, on note $\mathscr{D}_{\mathscr{Q}}$ la C^*-algèbre UHF $\bigotimes_{n\geqq 1} F_{q_n}$. Pour $\mathscr{Q} = (q, q, \ldots)$, on pose $\mathscr{D}_{\mathscr{Q}} = \mathscr{D}_{(q)}$. Pour la classification des $\mathscr{D}_{\mathscr{Q}}$ en fonction de $\mathscr{Q}$, on renvoie à [**8**].

1.2. Soit θ un automorphisme d'une C^*-algèbre UHF $\mathscr{D}$. On dit que θ est *produit tensoriel infini* s'il existe une suite $(K_1, K_2, \ldots)$ de facteurs finis de type I et, pour tout n, un automorphisme θ_n de K_n tels que:

$$\mathscr{D} = \bigotimes_{n\geqq 1} K_n; \quad \theta = \bigotimes_{n\geqq 1} \theta_n.$$

Pour tout entier n, il existe un unitaire $U_n \in K_n$ tel que $\theta_n = \mathrm{Ad}\, U_n$. Si $\theta^2 = 1$, alors $\theta_n{}^2 = 1$ et on peut supposer que U_n est un unitaire de carré 1 de K_n. Soient q_n l'ordre de K_n et p_n la multiplicité de la valeur propre $+1$ de U_n. Quitte à considérer $-U_n$, on peut supposer que $p_n \geqq q_n - p_n$ et poser $r_n = 2p_n - q_n$. On dira que r_n est *l'excédent de valeurs propres* $+1$ de θ_n. On a $r_n = q_n \operatorname{Tr}(U_n)$. On a ainsi associé à θ deux suites $\mathscr{R} = (r_1, r_2, \ldots)$ et $\mathscr{Q} = (q_1, q_2, \ldots)$ d'entiers positifs. Si θ et θ' sont deux symétries telles que $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}'$ et $\mathscr{R} = \mathscr{R}'$, alors θ est conjugué à θ'. Deux suites $\mathscr{R} = (r_1, r_2, \ldots)$ et $\mathscr{Q} = (q_1, q_2, \ldots)$ telles que : *i*) $0 \leqq r_n \leqq q_n$ pour tout n; *ii*) r_n et q_n ont même parité-définissent naturellement (à conjugaison près) un automorphisme de $\mathscr{D}_{\mathscr{Q}}$ que l'on note $\theta_{\mathscr{Q}}{}^{\mathscr{R}}$.

1.3. Soit θ_i $(i = 1, 2)$ une symétrie d'un facteur K_i de type I_{q_i} et notons r_i l'excédent de valeurs propres $+1$ de θ_i. Alors, r_1r_2 est l'excédent de valeurs propres $+1$ de $\theta_1 \otimes \theta_2$. Il s'ensuit que le nombre de valeurs propres $+1$ (resp. -1) de $\theta_1 \otimes \theta_2$ est égal à $(q_1q_2 + r_1r_2)/2$ (resp. $(q_1q_2 - r_1r_2)/2$). Ces calculs se généralisent sans difficulté au cas d'un produit tensoriel fini $\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \ldots \otimes \theta_n$.

1.4. *Le cas des automorphismes intérieurs.*

1.4.1. LEMME. *Soit $\theta = \bigotimes_{n\geqq 1} \theta_n$ un produit tensoriel d'automorphismes. Alors θ est intérieur si et seulement si $\theta_n = I$ à partir d'un certain rang.*

Preuve. Si $\theta_n = I$ à partir d'un certain rang, il est clair que θ est intérieur. Réciproquement, supposons que $\theta_n \neq I$ pour une infinité d'entiers n, et montrons que θ est extérieur. En regroupant au besoin des termes, on peut supposer $\theta_n \neq I$ pour tout n. Si on avait $\theta = \mathrm{Ad}\, U$, il existerait $p \in \mathbf{N}$ et un unitaire $V \in K^{(1,p)} = K_1 \otimes K_2 \otimes \ldots \otimes K_p$ tels que $||U - V|| = \alpha < 1$ [prendre pour V l'unitaire de la décomposition polaire d'un élément $x \in K^{(1,p)}$ tel que $||U - x||$ soit suffisamment petit]. On a

$$||\theta - \text{Ad } V|| \leqq 2\alpha < 2.$$

Soit $q > p$. Comme $\theta_q = \text{Ad } U_q \not\approx 1$, les sous-espaces propres de U_q relatifs aux valeurs propres $+1$ et -1 sont non nuls. Soit $x \in K_q$ une isométrie partielle de support initial (resp. final) contenu dans le sous-espace propre relatif à $+1$ (resp. -1). On a $U_q x U_q^* = -x$, d'où

$$||\theta(x) - \text{Ad } V(x)|| = ||\theta(x) - x|| = 2||x||,$$

ce qui contredit $||\theta - \text{Ad } V|| < 2$.

1.4.2. Soient $\theta = \text{Ad } U$ et $\theta' = \text{Ad } U'$ deux symétries d'une UHF $\mathscr{D}$ de trace normalisée Tr, Tr $(1) = 1$. Il est clair que:

$$\theta \text{ conjugué à } \theta' \Leftrightarrow |\text{Tr }(U)| = |\text{ Tr }(U')|$$

de sorte que la classification des automorphismes intérieurs est triviale. Dans ce qui suit, les symétries considérées seront toujours des automorphismes extérieurs.

1.5. *La propriété* ($\mathscr{U}$).

1.5.1. LEMME. *Soit* $\theta = \theta_2^{\mathscr{R}}$ *une symétrie de* $\mathscr{D}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe un unitaire* $U \in \mathscr{D}$, *de carré* 1, *tel que* $\theta(U) = -U$,

(ii) *Il existe un unitaire* $U \in \mathscr{D}$ *tel que* $\theta(U) = -U$,

(iii) *Il existe un unitaire* $U \in \mathscr{D}$ *tel que* $||\theta(U) + U|| < 2$,

(iv) *Il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $r_n = 0$.

Preuve. (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évident. Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit U un unitaire tel que $\alpha = ||\theta(U) + U|| < 2$. Il existe $s \in \mathbf{N}$ et un unitaire $V \in K^{(1,s)}$ tels que $||U - V|| < (2 - \alpha)/2$. On a donc $||V + \theta(V)|| < 2$. Soit q l'ordre de $K^{(1,s)}$. On a

$$\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \ldots \otimes \theta_s = \text{Ad } W$$

où W est un unitaire de $K^{(1,s)}$ représenté dans une base convenable par la matrice

$$\begin{bmatrix} I_p, & 0 \\ 0, & -I_{q-p} \end{bmatrix}$$

où I_p est l'identité de $M_p(\mathbf{C})$, et I_{q-p} l'identité de $M_{q-p}(\mathbf{C})$. Identifions les éléments de $K^{(1,s)}$ avec leur matrice dans cette base. On a, en posant

$$V = \begin{bmatrix} A, & B \\ C, & D \end{bmatrix} \quad (A \text{ matrice } p \times p, D \text{ matrice } (q - p) \times (q - p)):$$

$$V + \theta(V) = \begin{bmatrix} 2A, & 0 \\ 0, & 2D \end{bmatrix} \text{et } ||V + \theta(V)|| < 2 \Rightarrow ||A|| < 1 \text{ et } ||D|| < 1.$$

D'autre part,

$$I = VV^* = \begin{bmatrix} AA^* + BB^*, & \cdot \\ \cdot & , \quad \cdot \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I = V^*V = \begin{bmatrix} \cdot\,, & \cdot \\ \cdot\,, & B^*B + D^*D \end{bmatrix}$$

d'où $AA^* + BB^* = I_p$ et $B^*B + D^*D = I_{q-p}$. Alors

$$||BB^* - I_p|| < 1 \quad \text{et} \quad ||B^*B - I_{q-p}|| < 1$$

ce qui implique l'inversibilité de BB^* et B^*B, donc $p = q - p$, *i.e.* $r_1 r_2 \ldots r_s = 0$.

1.5.2. *Définition.* On dit qu'une symétrie θ possède la propriété $(\mathscr{U})$ si elle vérifie l'une des conditions équivalentes du lemme 1.5.1.

Il est clair que la propriété $(\mathscr{U})$ est un invariant de conjugaison; ce n'est pas un invariant de conjugaison extérieure.

1.6. *La propriété* $(\mathscr{U}_\infty)$.

1.6.1. LEMME. *Soit* $\theta = \theta_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}}$. *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe une suite centrale* (U_n) *d'unitaires de* $\mathscr{D} = \mathscr{D}_2$ *telle que* $U_n^2 = 1$ *et* $\theta(U_n) = -U_n$,

(ii) *Il existe une suite centrale* (U_n) *d'unitaires de* $\mathscr{D}$ *telle que* $\theta(U_n) = -U_n$,

(iii) *Il existe une suite centrale* (U_n) *d'unitaires de* $\mathscr{D}$ *telle que* $||\theta(U_n) + U_n|| \to 0 (n \to \infty)$,

(iv) $r_n = 0$ *pour une infinité d'entiers* n.

Rappelons qu'une suite (x_n) d'éléments d'une C^*-algèbre $\mathscr{A}$ est *centrale* si elle est bornée et si $||[x_n, y]|| \to 0 (n \to \infty)$ pour tout $y \in \mathscr{A}$. Deux suites centrales (x_n) et (y_n) sont dites *équivalentes* si $||x_n - y_n|| \to 0 (n \to \infty)$. Si $\mathscr{A}$ est l'UHF $\bigotimes_{n \geqq 1} K_n$, on a:

(i) toute suite bornée (x_n) telle que $x_n \in K_n$ pour tout n est centrale (trivial);

(ii) pour toute suite centrale (x_n) de $\mathscr{A}$ et tout entier n_0, il existe une suite centrale (y_n), équivalente à (x_n), et formée d'éléments de $\bigotimes_{p \geqq n_0} K_p$ (Démonstration analogue à celle de la prop. 12, p. 229 de [**6**]).

Démonstration du lemme 1.6.1. (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii): évident. Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit s un entier fixé. D'après ce qui précède, il existe une suite centrale (V_n) d'éléménts de $K_s \otimes K_{s+1} \otimes \ldots$ équivalente à (U_n). Pour n assez grand, on peut supposer que V_n est unitaire et qu'il existe $t_n \in \mathbf{N}$ tel que $V_n \in K_s \otimes K_{s+1} \otimes \ldots \otimes K_{t_n} = K^{(s, t_n)}$.

Soit n un entier assez grand pour que l'on ait en plus

$$||\theta(U_n) + U_n|| < 1/3, \quad ||U_n - V_n|| < 1/3.$$

Alors $||\theta(V_n) + V_n|| < 1$ et le lemme 1.5.1 (iii) appliqué à $\bigotimes_{i \geqq s} \theta_i$ prouve qu'il existe $n > s$ tel que $r_n = 0$

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

1.6.2 *Définition.* On dira qu'un automorphisme $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ possède la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$ s'il vérifie l'une des conditions du lemme 1.6.1.

Si $\theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ possède la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$, alors $\mathscr{Q}$ possède une infinité de termes pairs. La propriété $(\mathscr{U}_\infty)$ est trivialement un invariant de conjugaison; elle est aussi un invariant de conjugaison extérieure (cf. prop. 1.6.3.). Rappelons que deux automorphismes θ et θ' sont dits extérieurement conjugués s'il existe un unitaire U de $\mathscr{D}$ tel que θ' soit conjugué à $(\operatorname{Ad} U)\,\theta$. Si θ et θ' sont conjugués, on note $\theta \sim \theta'$.

1.6.3. Proposition. *Soit θ une symétrie de $\mathscr{D}$ possédant la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$. Alors:*

(i) *toute symétrie de $\mathscr{D}$ possédant la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$ est conjuguée à θ,*

(ii) *si θ' est une symétrie de $\mathscr{D}'$, et si $\mathscr{D} \otimes \mathscr{D}'$ est isomorphe à $\mathscr{D}$, alors $\theta \otimes \theta'$ est conjugué à θ,*

(iii) *toute symétrie de $\mathscr{D}$ extérieurement conjuguée à θ est conjuguée à θ.*

Preuve. (i) Soit $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$. En regroupant des termes, on peut supposer que $r_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En décomposant chaque q_n en facteurs premiers, on obtient $\mathscr{D} = \mathscr{D}_{\mathscr{Q}_1}$ avec $\mathscr{Q}_1 = (q_1^1, q_2^1, \ldots)$, chaque q_n^1 étant premier. Posons.

$$r_n^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } q_n^1 = 2 \\ 1 & \text{si } q_n^1 \neq 2 \end{cases}, \quad \text{et } \mathscr{R}_1 = (r_1^1, r_2^1, \ldots).$$

On a $\theta \sim \theta_{\mathscr{Q}_1}^{\mathscr{R}_1}$. De même, on obtient $\theta' \sim \theta_{\mathscr{Q}_2}^{\mathscr{R}_2}$ avec $\mathscr{Q}_2 = (q_1^2, q_2^2, \ldots)$ où chaque q_n^2 est premier, et $\mathscr{R}_2 = (r_1^2, r_2^2, \ldots)$ avec $r_n^2 = 0$ ou 1 pour tout n. Comme $\mathscr{Q}_2$ se déduit de $\mathscr{Q}_1$ par une permutation [**8**, théorèmes 1.12 et 1.13, p. 324], on a $\theta \sim \theta'$.

(ii) Comme θ possède la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$, il en va de même de $\theta \otimes \theta'$ (cf. lemme 1.6.1, (iv)) et on applique alors (i).

(iii) Soit $\theta' = \operatorname{Ad} V.\theta$ avec V unitaire de $\mathscr{D}$. Soit (U_n) une suite centrale d'unitaires telle que $\|\theta(U_n) + U_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$. On a $\theta'(U_n) + U_n = V(\theta(U_n) + U_n)V^* + [U_n, V]V^*$ et $\theta'(U_n) + U_n \to 0 (n \to \infty)$ de sorte que θ' a la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$. On applique alors (i).

1.6.4. *Définition.* On notera s_2^1 l'unique automorphisme (défini à conjugaison près) possédant la propriété $(\mathscr{U}_\infty)$.

La notation est empruntée à A. Connes [**3**]. Nous caractériserons plus loin s_2^1 par son algèbre de points fixes (cf. Prop. 2.1.3).

1.7. *Les propriétés* $(\mathscr{E})$ *et* $(\mathscr{I})$. Tout UHF $\mathscr{D}$ se plonge canoniquement dans le facteur hyperfini $\mathbf{R}$ de type II_1 via la représentation GNS associée à la trace normalisée de $\mathscr{D}$. Comme tout automorphisme θ de $\mathscr{D}$ préserve la trace, il se prolonge en un unique automorphisme $\bar{\theta}$ de $\mathbf{R}$. On dira qu'une symétrie θ de $\mathscr{D}$ a la propriété $(\mathscr{E})$ (resp. $(\mathscr{I})$) si $\bar{\theta}$ est un automorphisme extérieur (resp. intérieur) de $\mathbf{R}$. D'après [**2**, lemme 1.3.8, p. 154], $\theta = \theta_{\mathscr{R}}^{\mathscr{Q}}$ a la propriété $(\mathscr{I})$

si et seulement si $\prod_{n \geqq 1} r_n/q_n = \prod_{n \geqq 1} |\mathrm{Tr}\ U_n|$ est convergent (i.e. $\sum_{n \geqq 1} (1 - (r_n/q_n)) < +\infty$). Les propriétés $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{I})$ sont évidemment des invariants de conjugaison extérieure.

2. L'algèbre des points fixes de θ. Soit K_0 le foncteur de la K-théorie algébrique (cf. [**9**]). Rappelons que K_0 est un foncteur covariant de la catégorie des anneaux à unité dans celle des groupes abéliens qui vérifie $K_0(\mathscr{A} \oplus \mathscr{B}) = K_0(\mathscr{A}) \times K_0(\mathscr{B})$. Si $\mathscr{A} = M_n(\mathbf{C})$, $K_0(\mathscr{A}) = \mathbf{Z}$ et s'identifie au groupe associé au monoïde engendré par les classes d'équivalence de projecteurs de $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ deux C^*-algèbres de dimension finie avec $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$. On suppose que $\mathscr{A}_i$ est somme directe de deux facteurs I_i et $J_i (i = 1, 2)$. Alors $K_0(\mathscr{A}_i) = \mathbf{Z}^2$, et le plongement de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$ détermine un homomorphisme de $\mathbf{Z}^2$ dans $\mathbf{Z}^2$ représenté par une matrice $A \in M_2(\mathbf{N})$. Si

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "c"] & J_1 \arrow[d, "d"] \arrow[dl, "b"'] \\ I_2 & J_2 \end{tikzcd}$$

est le diagramme de Bratelli de l'inclusion de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$ (cf. [**1**]), alors

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Pour tout ce qui concerne les C^*-algèbres A.F. et leurs diagrammes, on renvoie à [**1**]. Soit $\mathscr{A} = \overline{\bigcup_{n \geqq 1} \mathscr{A}_n}$ une C^*-algèbre A.F. telle que, pour tout n, $\mathscr{A}_n$ soit somme directe de deux facteurs I_n et J_n. Alors $K_0(\mathscr{A})$ est le groupe limite inductive du système

$$(1) \quad \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{A_2} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{A_3} \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{A_{n+1}} \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \cdots$$

où A_{n+1} est la matrice correspondant à l'inclusion de $\mathscr{A}_n$ dans $\mathscr{A}_{n+1}$. La matrice correspondant à l'inclusion de $\mathscr{A}_n$ dans $\mathscr{A}_m (m > n)$ est évidemment $A_m A_{m-1} \ldots A_{n+1}$. La donnée du système inductif (1) et des ordres de I_1 et J_1 est équivalente à la donnée du diagramme de Bratelli de $\mathscr{A}$, et caractérise $\mathscr{A}$ à isomorphisme près [**1**, p. 200]. D'autre part, tout diagramme de Bratelli est le diagramme d'une unique C^*-algèbre A.F. [**1**, p. 201]; tout système inductif (1) est donc associé à une C^*-algèbre A.F. du type considéré ci-dessus, unique à condition de fixer les ordres de I_1 et J_1. Le groupe $K_0(\mathscr{A})$ ne caractérise pas $\mathscr{A}$ à isomorphisme près puisque $K_0(\mathscr{A} \otimes M_n(\mathbf{C})) = K_0(\mathscr{A})$. En fait, c'est le semi-groupe local $d(\mathscr{A}) \subset K_0(\mathscr{A})$, image de la dimension dans la terminologie de [**7**], qui caractérise $\mathscr{A}$ à isomorphisme près (cf. [**5**, thm. 2.14] et [**7**, thm. 4.3]), et $d(\mathscr{A})$ engendre un cône d'éléments positifs faisant de $K_0(\mathscr{A})$ un groupe ordonné qui n'est autre que le groupe de dimensions de $\mathscr{A}$ défini par Elliott dans [**7**].

2.1. *Diagramme de $\mathscr{D}^\theta$.* Comme θ n'est pas intérieur, $\theta_n \neq I$ pour une infinité d'entiers n et on peut supposer, en regroupant au besoin des termes, que $\theta_n \neq I$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ceci entraine $p_n \neq 0$ et $q_n - p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathscr{D}^\theta$ l'algèbre des points fixes de $\mathscr{D} = \bigotimes_{n \geqq 1} K_n$ sous l'action de $\theta = \bigotimes_{n\geqq 1} \theta_n$. Pour $n \geqq 1$, le facteur $K^{(1,n)}$ est stable par θ et on note $\mathscr{A}_n$ son algèbre de points fixes. On a $\mathscr{D}^\theta = \overline{\bigcup_{n\geqq 1} \mathscr{A}_n}$, car si $x \in \mathscr{D}^\theta$, il existe pour tout $\epsilon > 0$ un entier $n \geqq 1$ et un élément $x_\epsilon \in K^{(1,n)}$ tels que $||x - x_\epsilon|| \leqq \epsilon$, et alors

$$y_\epsilon = (x_\epsilon + \theta(x_\epsilon))/2 \in \mathscr{A}_n$$

vérifie

$$||x - y_\epsilon|| = \left\| \frac{x - x_\epsilon}{2} + \theta\left(\frac{x - x_\epsilon}{2}\right) \right\| \leqq \epsilon.$$

La C^*-algèbre $\mathscr{D}^\theta$ est donc A.F. On note $G_n = G_{n,\theta}$ le groupe des dimensions de $\mathscr{A}_n$ et $G = G_\theta$ celui de $\mathscr{D}^\theta$. D'après [7], G est la limite inductive des G_n. Le calcul du diagramme de $\mathscr{D}^\theta$ repose sur le lemme suivant.

2.1.1. LEMME. *$\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_2$) est somme directe de deux facteurs I_1 et J_1 (resp. I_2 et J_2) et le diagramme d'inclusion de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{A}_2$ est*

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "q_2 - p_2"] & J_1 \arrow[d, "p_2"] \arrow[dl, "q_2 - p_2"'] \\ I_2 & J_2 \end{tikzcd}$$

avec ordre $(I_1) = p_1$, ordre $(J_1) = q_1 - p_1$.

Preuve. On a $\theta_i = \operatorname{Ad} U_i$ pour $i = 1, 2$. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}, \xi_{p_1+1}, \ldots, \xi_{q_1})$ une base de $\mathbf{C}^{q_1}$ diagonalisant U_1 et telle que $\xi_1, \ldots, \xi_{p_1}$ soient les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $+1$.

Définissons de même $(\eta_1, \ldots, \eta_{p_2}, \eta_{p_2+1}, \ldots, \eta_{q_2})$ pour θ_2. Les vecteurs

$$\begin{gathered}
\xi_1 \otimes \eta_1, \ldots, \xi_{p_1} \otimes \eta_1, \\
\xi_1 \otimes \eta_2, \ldots, \xi_{p_1} \otimes \eta_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_1 \otimes \eta_{p_2}, \ldots, \xi_{p_1} \otimes \eta_{p_2}, \\
\xi_{p_1+1} \otimes \eta_{p_2+1}, \ldots, \xi_{q_1} \otimes \eta_{p_2+1}, \\
\xi_{p_1+1} \otimes \eta_{p_2+2}, \ldots, \xi_{q_1} \otimes \eta_{p_2+2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_{p_1+1} \otimes \eta_{q_2}, \ldots, \xi_{q_1} \otimes \eta_{q_2}
\end{gathered}$$

forment une base orthonormale du sous-espace propre de $U_1 \otimes U_2$ relatif à la valeur propre $+1$. Ordonnons de même les vecteurs $\chi_{(i,i')} = \xi_i \otimes \eta_{i'}$ qui sont dans le sous-espace propre de $U_1 \otimes U_2$ relatif à la valeur propre -1. On définit ainsi une base ordonnée de $\mathbf{C}^{q_1} \otimes \mathbf{C}^{q_2}$. Identifions les éléments de K_1

avec leur matrice dans la base $(\xi_1, \ldots, \xi_{q_1})$. Si

$$x = \begin{bmatrix} A, & B \\ C, & D \end{bmatrix} \in K_1 \ (A \text{ matrice } p_1 \times p_1, D \text{ matrice } (q_1 - p_1) \times (q_1 - p_1)),$$

alors $\theta(x) = \begin{bmatrix} A\ , & -B \\ -C, & D \end{bmatrix}$ de sorte que $\mathscr{A}_1$ est l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} A, & 0 \\ 0\ , & D \end{bmatrix}$ avec A, D arbitraires. Ceci prouve que $\mathscr{A}_1 = I_1 \oplus J_1$ où I_1 (resp. J_1) est un facteur d'ordre p_1 (resp. $q_1 - p_1$). De même, $\mathscr{A}_2$ est somme directe de deux facteurs. Enfin, il résulte de la formule

$$(x \otimes 1)_{(i,i')(j,j')} = ((x \otimes 1)\chi_{(j,j')}{}^{i}|\chi_{(i,i')}) = (x\xi_j|\xi_i)(\eta_{j'}|\eta_{i'}) = \delta_{i'j'}x_{ij}$$

que si $x = \begin{bmatrix} A, & 0 \\ 0\ , & D \end{bmatrix} \in \mathscr{A}_1$, alors la matrice de $x \otimes 1$ dans **la** base choisie pour $K_1 \otimes K_2$ est:

$$\begin{bmatrix}
\overbrace{A \ \ddots \ A}^{p_2 \text{ fois}} & & & \\
& \overbrace{D \ \ddots \ D}^{q_2 - p_2 \text{ fois}} & & \mathbf{0} \\
& & \overbrace{D \ \ddots \ D}^{p_2 \text{ fois}} & \\
\mathbf{0} & & & \overbrace{A \ \ddots \ A}^{q_2 - p_2 \text{ fois}}
\end{bmatrix}$$

On en déduit le diagramme d'inclusion désiré.

2.1.2. Proposition. *La diagramme de $\mathscr{D}^\theta$ est:*

$$\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "q_2 - p_2"] & J_1 \arrow[d, "p_2"] \arrow[dl, "q_2 - p_2"] \\
I_2 \arrow[d, phantom, "\vdots"] & J_2 \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
I_n \arrow[d, "p_{n+1}"'] \arrow[dr, "q_{n+1} - p_{n+1}"] & J_n \arrow[d, "p_{n+1}"] \arrow[dl, "q_{n+1} - p_{n+1}"] \\
I_{n+1} \arrow[d, phantom, "\vdots"] & J_{n+1} \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

où I_n et J_n sont des facteurs tels que:

$$\mathscr{A}_n = I_n \oplus J_n, \text{ ordre } I_n = \tfrac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n} q_i + \prod_{i=1}^{n} r_i\right],$$
$$\text{ordre } J_n = \tfrac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n} q_i - \prod_{i=1}^{n} r_i\right].$$

Celà résulte du lemme 2.1.1, et de 1.3 pour le calcul des ordres.

De cette proposition, on déduit le diagramme d'inclusion

$$\begin{tikzcd}
I_n \arrow[d, "\alpha_{n,m}"'] \arrow[dr, "\beta_{n,m}" near start] & J_n \arrow[d, "\alpha_{n,m}"] \arrow[dl, "\beta_{n,m}" near end] \\
I_m & J_m
\end{tikzcd}$$

avec

$$\alpha_{n,m} = \tfrac{1}{2}\left[\prod_{i=n+1}^{m} q_i + \prod_{i=n+1}^{m} r_i\right] \quad \text{et} \quad \beta_{n,m} = \tfrac{1}{2}\left[\prod_{i=n+1}^{m} q_i - \prod_{i=n+1}^{m} r_i\right].$$

D'après le corollaire 3.5, p. 212 de [**1**], la C^*-algèbre $\mathscr{D}^\theta$ est simple. Celà résulte aussi de [**10** corollaire p. 7].

2.1.3. Proposition. *L'automorphisme $s_2^{\,1}$ est l'unique symétrie (produit tensoriel) dont l'algèbre des points fixes soit* UHF.

Preuve. Supposons que $\theta = s_2^{\,1}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[dr, "1"] & & J_1 \arrow[dl, "1"'] \\
& G_1 \arrow[dl, "q_2/2"'] \arrow[dr, "q_2/2"] & \\
I_2 \arrow[dr, "1"] & & J_2 \arrow[dl, "1"'] \\
& G_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{tikzcd}
I_n \arrow[dr, "1"] & & J_n \arrow[dl, "1"'] \\
& G_n \arrow[dl, "q_{n+1}/2"'] \arrow[dr, "q_{n+1}/2"] & \\
I_{n+1} & & J_{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

définit une C^*-algèbre A.F. isomorphe d'une part à $\mathscr{D}^\theta$, d'autre part à la C^*-algèbre UHF $\overline{\bigcup_{n\geq 1} G_n}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

Réciproquement, supposons que $\mathscr{D}^{\theta}$ soit UHF et montrons que θ est conjugué à $s_2{}^1$. Si $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}{}^{\mathscr{R}}$ n'était pas conjugué à $s_2{}^1$, il existerait un entier n_0 tel que $r_n \neq 0$ pour $n \geqq n_0$. Comme $\mathscr{D}^{\theta}$ est UHF il existe $n \geqq n_0$, $m > n$, et un facteur fini discret K tels que $I_n \oplus J_n \subset K \subset I_m \oplus J_m$ (cf. [**1**, thm. 2.7, p. 208]). Considérons le diagramme d'inclusion:

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[dr, "\alpha"] & & J_n \arrow[dl, "\beta"'] \\ & K \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\beta'"] & \\ I_m & & J_m \end{tikzcd}$$

On a $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \alpha_{n,m}$ et $\alpha\beta' = \beta\alpha' = \beta_{n,m}$, d'où $\alpha/\beta = \beta'/\alpha' = \alpha'/\beta'$ et donc $\alpha' = \beta'$. Alors $\alpha = \beta$, et $\alpha_{n,m} = \beta_{n,m}$ d'où

$$\prod_{i=n+1}^{m} r_i = -\prod_{i=r+1}^{m} r_i = 0$$

ce qui est absurde.

Au § 3, nous aurons besoin du lemme technique suivant.

2.1.4. LEMME. *Supposons que $\mathscr{D}^{\theta}$ soit isomorphe à $\mathscr{D}^{\theta'}$. Alors, pour tout entier n, il existe un entier k tel que*

$$\text{PGCD (ordre } I_n, \text{ ordre } J_n)|\text{PGCD (ordre } I_k', \text{ ordre } J_k').$$

Preuve. Soit φ un isomorphisme de $\mathscr{D}^{\theta'}$ sur $\mathscr{D}^{\theta}$. Pour tout entier n, il existe un entiei k tel que $I_n \oplus J_n \subset \varphi(I_k') \oplus \varphi(J_k')$.

Considérons le diagramme d'inclusion

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[drr, "\beta" near start] & & J_n \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[dll, "\beta'"' near start] \\ \varphi(I_k') & & \varphi(J_k') \end{tikzcd}$$

On a

$$\alpha \text{ ordre } I_n + \beta' \text{ ordre } J_n = \text{ordre } \varphi(I_k') = \text{ordre } I_k'$$
$$\beta \text{ ordre } I_n + \alpha' \text{ ordre } J_n = \text{ordre } \varphi(J_k') = \text{ordre } J_k'$$

et donc

$$\text{PGCD (ordre } I_n, \text{ ordre } J_n)|\text{PGCD (ordre } I_k', \text{ ordre } J_k').$$

2.2. *Calcul du groupe des dimensions de $\mathscr{D}^{\theta}$.* Dans ce paragraphe et les suivants, θ désigne une symétrie extérieure non conjuguée à $s_2{}^1$. En regroupant des termes, on peut supposer que $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}{}^{\mathscr{R}}$ avec $r_n \neq 0$ pour $n \geqq 2$. Comme G_n est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$ pour tout n, le rang de G est $\leqq 2$. En fait, le rang de G est égal à 2 car l'homomorphisme canonique de G_n dans G_{n+1} est injectif puisque la matrice

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} p_{n+1}, & q_{n+1} - p_{n+1} \\ q_{n+1} - p_{n+1}, & p_{n+1} \end{bmatrix}$$

est inversible (son déterminant est égal à $r_{n+1}\, q_{n+1}$).

Soient e_n et f_n des projecteurs minimaux de I_n et J_n, et notons $[e_n]$ et $[f_n]$ leurs classes d'équivalence dans G. Identifions G à un sous-groupe de $\mathbf{Q}^2$ en envoyant $[e_1]$ sur $(1, 0)$ et $[f_1]$ sur $(0, 1)$. On a $[e_n] = B_n^{-1}[e_1]$ et $[f_n] = B_n^{-1}[f_1]$ où $B_n = A_n A_{n-1} \ldots A_2$. Par calcul direct ou en écrivant le diagramme d'inclusion de $I_1 \oplus J_1$ dans $I_n \oplus J_n$ (cf. 2.1.2), il vient:

$$B_n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \prod_{i=2}^{n} q_i + \prod_{i=2}^{n} r_i, & \prod_{i=2}^{n} q_i - \prod_{i=2}^{n} r_i \\ \prod_{i=2}^{n} q_i - \prod_{i=2}^{n} r_i, & \prod_{i=2}^{n} q_i + \prod_{i=2}^{n} r_i \end{bmatrix}.$$

On en déduit:

$$B_n^{-1} = \frac{1}{2\prod_{i=2}^{n} q_i r_i}\begin{bmatrix} \prod_{i=2}^{n} q_i + \prod_{i=2}^{n} r_i, & -\left(\prod_{i=2}^{n} q_i - \prod_{i=2}^{n} r_i\right) \\ -\left(\prod_{i=2}^{n} q_i - \prod_{i=2}^{n} r_i\right), & \prod_{i=2}^{n} q_i + \prod_{i=2}^{n} r_i \end{bmatrix}$$

$$[e_n] = \frac{1}{2\prod_{i=2}^{n} q_i r_i}\begin{bmatrix} \prod_{i=2}^{n} q_i + \prod_{i=2}^{n} r_i \\ -\left(\prod_{i=2}^{n} q_i - \prod_{i=2}^{n} r_i\right) \end{bmatrix}$$

$$[f_n] = \frac{1}{2\prod_{i=2}^{n} q_i r_i}\begin{bmatrix} -\left(\prod_{i=2}^{n} q_i - \prod_{i=2}^{n} r_i\right) \\ \prod_{i=2}^{n} q_i + \prod_{i=2}^{n} r_i \end{bmatrix}.$$

Alors

$$G_n = \{\lambda[e_n] + \lambda'[f_n] \mid \lambda, \lambda' \in \mathbf{Z}\} = B_n^{-1}\mathbf{Z}^2,$$
$$G_n^+ = \{\lambda[e_n] + \lambda'[f_n] \mid \lambda, \lambda' \in \mathbf{N}\} = B_n^{-1}\mathbf{Z}_+^2$$

et

$$G = \bigcup_{n\geqq 2} B_n^{-1}\mathbf{Z}^2, \quad G^+ = \bigcup_{n\geqq 2} B_n^{-1}\mathbf{Z}_+^2$$

Le cône G^+ des éléments positifs de G contient $\mathbf{Z}^2$ et est limité par deux demi-droites de pentes α et β données par:

$$\alpha = \text{limite de la pente de } \mathbf{R}_+[e_n]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1 - \prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i}{q_i}}{1 + \prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i}{q_i}}\right)$$
$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

Comme on a supposé $r_i \neq 0$ pour $i \leqq 2$, on a:

$$\prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \text{ vérifie la propriété } (\mathscr{E})$$

(cf. 1.7), de sorte que G^+ est l'intersection avec G d'un demi-plan réel ouvert si θ vérifie $(\mathscr{E})$ et d'un cône strictement saillant de $\mathbf{R}^2$ si θ vérifie $(\mathscr{I})$.

Enfin, notons qu'Elliott a étudié des exemples analogues de groupes de dimensions dans [**7**].

2.3. *Relation entre $K_0(\mathscr{D}^\theta)$ et $K_0(\mathscr{D})$.* A l'injection $i : \mathscr{D}^\theta \to \mathscr{D}$ correspond un homomorphisme $i_* : K_0(\mathscr{D}^\theta) \to K_0(\mathscr{D})$. Le groupe $K_0(\mathscr{D}^\theta) = G_\theta$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{Q}^2$. Identifions de même $K_0(\mathscr{D})$ à un sous-groupe de $\mathbf{Q}$ via la trace normalisée de $\mathscr{D}$. Alors, i_* est l'homomorphisme:

$$\begin{aligned}(x, y) \in G_\theta \mapsto \operatorname{Tr}\,(x[e_1] + y[f_1]) &= x \operatorname{Tr}\,(e_1) + y \operatorname{Tr}\,(f_1) \\ &= (x + y)/q_1 \in \mathbf{Q}\end{aligned}$$

et Ker i_* est l'intersection de G_θ et de la seconde bissectrice. Or un élément $\lambda[e_n] + \lambda'[f_n]$ de G_n $(\lambda, \lambda' \in \mathbf{Z})$ est sur la seconde bissectrice si et seulement si $\lambda + \lambda' = 0$, de sorte que

$$\operatorname{Ker} i_* = \left\{ (x, -x) \in \mathbf{Q}^2 \,\middle|\, x \text{ est de la forme } \frac{\lambda}{\prod_{i=2}^{n} r_i} \text{ avec } \lambda \in \mathbf{Z} \text{ et } n \geqq 2 \right\}.$$

2.4. *Etude de certains isomorphismes de G_θ sur $G_{\theta'}$.* Notons $[I]$ (resp. $[I']$) la classe d'équivalence de l'identité dans $\mathscr{D}^\theta$ (resp. $\mathscr{D}^{\theta'}$). Nous allons expliciter la forme des isomorphismes de groupes ordonnés φ de G_θ sur $G_{\theta'}$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) $\varphi[I] = [I']$

(ii) φ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_\theta \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & K_0(\mathscr{D}) \\ G_{\theta'} \arrow[ur, "i_*'"'] & \end{tikzcd}$$

(i.e. φ conserve la trace normalisée de $\mathscr{D}$ en un sens facile à préciser). Tout élément $[g] \in G_\theta$ est de la forme $[g] = x[e_1] + y[f_1]$ avec $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$; on a $\varphi\,[g] = x\varphi[e_1] + y\varphi[f_1]$, de sorte que φ se prolonge en un isomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\mathbf{Q}^2$. Soit M la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base $\mathscr{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ de $\mathbf{Q}^2$ (Notons que $(1, 1) = [e_1] + [f_1] = [e_1'] + [f_1']$ et que $(-1, 1) = [f_1] - [e_1] = [f_1'] - [e_1']$). Les coordonnées de $[e_n]$ et $[f_n]$ dans $\mathscr{B}$ sont:

$$[e_n] = \left(\frac{1}{2\prod_{i=2}^{n} q_i}, \frac{-1}{2\prod_{i=2}^{n} r_i} \right), \quad [f_n] = \left(\frac{1}{2\prod_{i=2}^{n} q_i}, \frac{1}{2\prod_{i=2}^{n} r_i} \right)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

de sorte que G_θ^+ est le cône de G_θ contenant le point (1, 1) et limité par deux demi-droites de pentes respectives (calculées dans $\mathscr{B}$):

$$-\prod_{i=2}^{\infty} \frac{q_i}{r_i} \quad \text{et} \quad \prod_{i=2}^{\infty} \frac{q_i}{r_i}.$$

Comme φ transforme Ker i_* en Ker i_*', $\tilde{\varphi}$ doit laisser globalement invariant le sous-espace engendré par le deuxième élément de la base $\mathscr{B}$, d'où

$$M = \begin{bmatrix} a, & 0 \\ b, & d \end{bmatrix}.$$

D'autre part.

$$[I] = \frac{q_1 + r_1}{2}[e_1] + \frac{q_1 - r_1}{2}[f_1]$$

$$= \frac{q_1}{2}([e_1] + [f_1]) - \frac{r_1}{2}([f_1] - [e_1]) \quad \text{et, de même,}$$

$$[I'] = \frac{q_1'}{2}([e_1'] + [f_1']) - \frac{r_1'}{2}([f_1'] - [e_1']).$$

La condition $\varphi[I] = [I']$ s'écrit donc:

$$M\begin{bmatrix} \frac{1}{2}q_1 \\ -\frac{1}{2}r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}q_1' \\ -\frac{1}{2}r_1' \end{bmatrix} \quad \text{d où}$$

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1'}{q_1}, & 0 \\ \dfrac{dr_1 - r_1'}{q_1}, & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{q_1}{q_1'}, & 0 \\ \dfrac{r_1' - dr_1}{dq_1'}, & \dfrac{1}{d} \end{bmatrix}.$$

Ecrivons que $\tilde{\varphi}(G_\theta) \subset G_{\theta'}$. Il suffit d'écrire que $\varphi[e_n]$, $\varphi[f_n] \in G_{\theta'}$ pour tout $n \geqq 2$, i.e.: pour tout $n \geqq 2$, il existe $m \geqq 2$, et $k, k', l, l' \in \mathbf{Z}$ tels que:

$$\varphi[e_n] = k[e_m'] + k'[f_m']$$
$$\varphi[f_n] = l[e_m'] + l'[f_m'].$$

En développant, il vient:

$$\frac{q_1'}{2\prod_{i=1}^{n} q_i} = \frac{k + k'}{2\prod_{i=2}^{m} q_i'} = \frac{l + l'}{2\prod_{i=2}^{m} q_i'}$$

$$\frac{dr_1 - r_1'}{2\prod_{i=1}^{n} q_i} - \frac{d}{2\prod_{i=2}^{n} r_i} = \frac{k' - k}{2\prod_{i=2}^{m} r_i'}$$

$$\frac{dr_1 - r_1'}{2\prod_{i=1}^{n} q_i} + \frac{d}{2\prod_{i=2}^{n} r_i} = \frac{l' - l}{2\prod_{i=2}^{m} r_i'}$$

Donc $k + k' = l + l'$. Posons

$$\lambda = k + k'$$
$$\mu = k' - k,$$
$$\nu = l' - l.$$

Alors λ, μ, ν ont même parité, et il existe, pour tout triplet (λ, μ, ν) d'entiers de même parité, un quadruplet (k, k', l, l') d'entiers vérifiant les relations ci-dessus. La relation $\tilde{\varphi}(G_\theta) \subset G_{\theta'}$ est donc équivalente à: pour tout $n \geqq 2$, il existe $m \in \mathbf{N}$, et $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{Z}$, de même parité, tels que:

$$(1) \quad \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} q_i} = \frac{\lambda}{\prod_{i=1}^{m} q_i'}$$

$$(2) \quad \frac{dr_1 - r_1'}{\prod_{i=1}^{n} q_i} - \frac{d}{\prod_{i=2}^{n} r_i} = \frac{\mu}{\prod_{i=2}^{m} r_i'}$$

$$(3) \quad \frac{dr_1 - r_1'}{\prod_{i=1}^{n} q_i} + \frac{d}{\prod_{i=2}^{n} r_i} = \frac{\nu}{\prod_{i=2}^{m} r_i'}$$

De même, il résulte de la forme de la matrice M^{-1} que la relation $\tilde{\varphi}^{-1}(G_{\theta'}) \subset G_\theta$ et équivalente à: pour tout $m \geqq 2$, il existe $n \in \mathbf{N}$, et $\lambda', \mu', \nu' \in \mathbf{Z}$, de même parité, tels que:

$$(1') \quad \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} q_i'} = \frac{\lambda'}{\prod_{i=1}^{m} q_i}$$

$$(2') \quad \frac{r_1' - dr_1}{d\prod_{i=1}^{m} q_i'} - \frac{1}{d\prod_{i=2}^{m} r_i'} = \frac{\mu'}{\prod_{i=2}^{n} r_i}$$

$$(3') \quad \frac{r_1' - dr_1}{d\prod_{i=1}^{m} q_i'} + \frac{1}{d\prod_{i=2}^{m} r_i'} = \frac{\nu'}{\prod_{i=2}^{n} r_i}$$

Enfin, exprimons que $\tilde{\varphi}$ envoie G_θ^+ sur $G_{\theta'}^+$. Si θ et θ' vérifient la propriété $(\mathscr{E})$, alors G_θ^+ (resp. $G_{\theta'}^+$) est l'intersection avec G_θ (resp. $G_{\theta'}$) du demi-plan réel contenant $[I]$ et limité par la seconde bissectrice, de sorte que $\tilde{\varphi}$ envoie toujours G_θ^+ sur $G_{\theta'}^+$. Si θ et θ' vérifient la propriété $(\mathscr{I})$, alors G_θ^+(resp. $G_{\theta'}^+$) est limité par deux demi-droites de pentes égales en module à $\prod_{i=2}^{\infty} q_i/r_i$ (resp. $\prod_{i=2}^{\infty} q_i'/r_i'$) de sorte que $\tilde{\varphi}(G_\theta^+) = G_\theta^+$, implique

$$(4) \quad \prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = |d| \frac{q_1}{q_1'} \prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}$$

3. Conditions nécessaires de conjugaison extérieure et de conjugaison.

3.1. *Conditions nécessaires de conjugaison extérieure.* Soit θ une symétrie de $\mathscr{D}$. Posons $\tilde{\mathscr{D}} = F_2 \otimes \mathscr{D}$ et $\beta = \operatorname{Ad} U_0 \otimes \theta$, ou U_0 est un unitaire de valeurs propres $+1$ et -1.

On sait que le produit croisé $C^*(\mathscr{D}, \theta)$ est isomorphe à $\tilde{\mathscr{D}}^\beta$ et que, si θ et θ' sont extérieurement conjugués, $C^*(\mathscr{D}, \theta)$ et $C^*(\mathscr{D}, \theta')$ sont isomorphes (cf. [**11**]). Nous allons, dans notre cadre, préciser ce résultat. Soit $(e_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq 2}$ un système d'unités matricielles de F_2 associé à une base de $\mathbf{C}^2$ dans laquelle $U_0 = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$. Tout $X \in \tilde{\mathscr{D}}$ s'écrit de manière unique $X = \sum_{1 \leqq i,j \leqq 2} e_{ij} \otimes x_{ij}$ avec $x_{ij} \in \mathscr{D}$, soit, sous forme matricielle:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}, & x_{12} \\ x_{21}, & x_{22} \end{bmatrix}.$$

On a

$$\beta(X) = \begin{bmatrix} \theta(x_{22}), & \theta(x_{21}) \\ \theta(x_{12}), & \theta(x_{11}) \end{bmatrix}, \quad \text{d'où } \tilde{\mathscr{D}}^\beta = \left\{ \begin{bmatrix} x, & y \\ \theta(y), & \theta(x) \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathscr{D} \right\}$$

3.1.1. Lemme. *Soient θ et θ' deux symétries extérieurement conjuguées de $\mathscr{D}$. Alors, il existe un automorphisme σ de $\tilde{\mathscr{D}}$ tel que $\sigma(\tilde{\mathscr{D}}^\beta) = \tilde{\mathscr{D}}^{\beta'}$.*

Preuve. On peut supposer que $\theta' = \operatorname{Ad} V\,\theta$ où V est un unitaire tel que $V\theta(V) = 1$ (puisque $\theta'^2 = I$). Soit $W = \begin{bmatrix} I, & 0 \\ 0, & V \end{bmatrix}$. Alors W est un unitaire de $\tilde{\mathscr{D}}$ tel que

$$W \begin{bmatrix} x, & y \\ \theta(y), & \theta(x) \end{bmatrix} W^* = \begin{bmatrix} x, & yV^* \\ V\theta(y), & V\theta(x)V^* \end{bmatrix}.$$

Comme $V\,\theta(x)V^* = \theta'(x)$ et que $V\,\theta(y) = \theta'(y\,V^*)$ (car $V\,\theta(V) = 1$), on a $W\,\tilde{\mathscr{D}}^\beta W^* = \tilde{\mathscr{D}}^{\beta'}$, ce qui prouve le résultat avec $\sigma(x) = WxW^*$.

3.1.2. *Notations.* Dans [**5**, 3.1, p. 193], J. Dixmier définit un entier généralisé comme une application de l'ensemble $\{d_1, d_2, \ldots\}$ des entiers premiers dans $[0, 1, 2, \ldots, +\infty]$. On note $d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots$ un entier généralisé prenant la valeur α_1 en d_1, α_2 en d_2, etc. ... Pour tout entier généralisé $N = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots$, on désigne par $[N]$ le sous groupe de $\mathbf{Q}$ (contenant 1) formé des éléments de la forme $p/d_1^{\beta_1} d_2^{\beta_2} \ldots$ ($p \in \mathbf{Z}$, $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$ et $\beta_i = 0$ à partir d'un certain rang). L'application $N \mapsto [N]$ est un bijection de l'ensemble des entiers généralisés sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbf{Q}$ contenant 1.

Si $N = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots$ et $N' = d_1^{\alpha_1'} d_2^{\alpha_2'} \ldots$, on a:

$$[N] \text{ isomorphe à } [N'] \Leftrightarrow N \sim N' \text{ au sens de } [\mathbf{5}, 4.4, \text{p. } 196]$$

c'est-à-dire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \alpha_i' \text{ sauf pour un nombre fini d'indices } i \text{ et} \\ \alpha_i = +\infty \Leftrightarrow \alpha_i' = +\infty. \end{cases}$$

Si $\mathscr{R} = (r_1, r_2, \ldots)$ est une suite d'entiers non nuls, J. Dixmier lui associe l'entier généralisé $d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots$ où $\alpha_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{i,n}$, l'entier $\alpha_{i,n}$ désignant l'exposant de d_i dans la décomposition de r_n en facteurs premiers. Si $\mathscr{R} = (r_1, r_2, \ldots)$ est une suite d'entiers $\geqq 0$, on notera $N(\mathscr{R})$ l'entier généralisé associé à la suite obtenue à partir de $\mathscr{R}$ en enlevant les termes qui sont nuls.

3.1.3. PROPOSITION. *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries extérieurement conjuguées. Alors,*

(i) *$N(\mathscr{R})$ est équivalent à $N(\mathscr{R}')$,*

(ii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = \delta \prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}$, *où δ est un rationnel tel que $u \mapsto \delta u$ soit un isomorphisme de $[N(\mathscr{R})]$ sur $[N(\mathscr{R}')]$.*

Preuve. (i) Si on change un nombre fini de r_i, on ne change pas la classe de conjugaison extérieure de $\theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$. On peut donc supposer que $r_i \neq 0$ et $r_i' \neq 0$ pour tout i. D'après 3.1.1, il existe un isomorphisme de $\tilde{\mathscr{D}}^{\beta}$ sur $\tilde{\mathscr{D}}^{\beta'}$ conservant la trace de $\tilde{\mathscr{D}}$. On en déduit un isomorphisme de groupes ordonnés de G_β sur $G_{\beta'}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de 2.4 avec $\theta_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\tilde{\mathscr{R}}}$ (resp. $\theta_{\tilde{\mathscr{Q}}'}^{\tilde{\mathscr{R}}'}$) au lieu de $\theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{L}}$ (resp. $\theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{L}'}$), où $\tilde{\mathscr{R}} = (r_0, r_1, r_2, \ldots)$, $\tilde{\mathscr{Q}} = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$, $r_0 = 0$, $q_0 = 2$ et de même pour $\tilde{\mathscr{R}}'$ et $\tilde{\mathscr{Q}}'$. Avec les notations de 2.4, Ker i_* est isomorphe à Ker i_*'. Or Ker i_* (resp. Ker i_*') est isomorphe à $[N(\mathscr{R})]$ (resp. $[N(\mathscr{R}')]$) d'après 2.3, d'où (i).

(ii) Si l'un des r_i (donc l'un des r_i') est nul, ou si θ et θ' vérifient la condition $(\mathscr{E})$, tout est trivial.

Supposons donc que r_i, r_i' sont non nuls pour tout i et que θ et θ' vérifient la condition $(\mathscr{I})$. L'existence d'un isomorphisme de G_β sur $G_{\beta'}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de 2.4 implique (équation (4) avec $\tilde{\mathscr{R}}$, $\tilde{\mathscr{R}}'$, $\tilde{\mathscr{Q}}$, $\tilde{\mathscr{Q}}'$ au lieu de $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{Q}'$):

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = |d| \prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}.$$

Puisqu'ici

$$M = \begin{bmatrix} \dfrac{q_0}{q_0'}, & 0 \\ \dfrac{dr_0 - r_0'}{q_0}, & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & d \end{bmatrix},$$

l'application $\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ dx \end{bmatrix}$ envoie Ker i_* sur Ker i_*'. Or

$$\text{Ker } i_* = \left\{ \left[\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{\lambda}{\prod_{i=1}^{n} r_i} \end{matrix} \right] \middle| \lambda \in \mathbf{Z}, n \geqq 1 \right\}$$

dans la base $\mathscr{B}$ (cf. 2.3) de sorte que $u \mapsto du$ est bien un isomorphisme de $[N(\mathscr{R})]$ sur $[N(\mathscr{R}')]$, ainsi que $u \mapsto \delta u$ avec $\delta = |d|$.

3.1.4. *Remarque.* On aurait pu déduire directement (i) et (ii) des équations (3), (3′) et (4) de 2.4.

3.2. *Conditions nécessaires de conjugaison.* Soit $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ avec $r_i \neq 0$ pour $i \geqq 2$.

3.2.1. PROPOSITION. *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries ne possédant pas la propriété $(\mathscr{U})$. On suppose que θ et θ' sont conjugués. Alors, on a:*

(i) $N(\mathscr{R}) = N(\mathscr{R}')$

(ii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}$.

Preuve. (i) On sait (Prop. 3.1.3) que $N(\mathscr{R}) = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots$ est équivalent à $N(\mathscr{R}') = d_1^{\alpha_1'} d_2^{\alpha_2'} \ldots$. Il suffit donc de prouver que $\alpha_i = \alpha_i'$ si α_i et α_i' sont finis. Soit p un entier premier intervenant à la puissance α (resp. α') dans $N(\mathscr{R})$ (resp. $N(\mathscr{R}')$) et montrons que $\alpha = \alpha'$. En regroupant des termes, on peut supposer que $p^\alpha | r_1$ et que p est premier avec r_i pour $i \geqq 2$. De même, on peut faire une hypothèse analogue pour $p^{\alpha'}$. Enfin, rappelons que, si a et b sont deux entiers, on a:

$$\text{PGCD}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ PGCD } (a, b) & \text{si } a = 2^\lambda a',\ b = 2^\mu b' \text{ avec } a', b' \text{ impairs et } \lambda \neq \mu, \\ \text{PGCD } (a, b) & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

1*er cas*: $p \neq 2$. Alors

$$\theta_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\mathscr{R}} = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}} \otimes \theta_{(p)}^{(1)} \quad \text{est conjugué à} \quad \theta_{\tilde{\mathscr{Q}}'}^{\mathscr{R}'} = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'} \otimes \theta_{(p)}^{(1)}$$

où $\tilde{\mathscr{Q}} = (pq_1, pq_2, \ldots)$ et $\tilde{\mathscr{Q}}' = (pq_1', pq_2', \ldots)$. D'après la proposition 2.1.2 (dont on reprend les notations avec $\theta_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\mathscr{R}}$ au lieu de θ), on a:

$$\text{Ordre } I_n = \tfrac{1}{2}\left[p^n \prod_{i=1}^{n} q_i + \prod_{i=1}^{n} r_i\right]$$

$$\text{Ordre } J_n = \tfrac{1}{2}\left[p^n \prod_{i=1}^{n} q_i - \prod_{i=1}^{n} r_i\right],$$

d'où PGCD (ordre I_n, ordre J_n) $= p^{\beta_n} s_n$ avec:

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

(i) s_n premier avec p,
(ii) $\beta_n \leqq \alpha$ pour tout n,
(iii) $\beta_n = \alpha$ pour $n \geqq \alpha$.
De même, PGCD (ordre I_k', ordre J_k') $= p^{\beta_k'} s_k'$ ou s_k' et β_k' vérifient des conditions analogues à (i), (ii) et (iii). D'après le lemme 2.1.4, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p^\alpha|$PGCD (ordre I_k', ordre J_k') d'où $\alpha' \geqq \alpha$. Par symétrie, $\alpha = \alpha'$.

2 ème cas: $p = 2$. Soit β un entier $> \operatorname{Max}(\alpha, \alpha')$. Soit θ'' une symétrie du facteur F_{2^β} ayant un excédent de valeurs propres $+1$ égal à 2. On a:

$$\theta_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\tilde{\mathscr{R}}} = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}} \otimes \theta'' \quad \text{est conjugué à} \quad \theta_{\tilde{\mathscr{Q}}'}^{\tilde{\mathscr{R}}'} = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'} \otimes \theta''$$

où $\tilde{\mathscr{R}} = (2r_1, r_2, r_3, \ldots)$, $\tilde{\mathscr{Q}} = (2^\beta q_1, q_2 \ldots)$ et où $\tilde{\mathscr{R}}'$ et $\tilde{\mathscr{Q}}'$ sont définis de façon similaire. Comme dans le premier cas, on a successivement:

$$\text{Ordre } I_n = \tfrac{1}{2}\left[2^\beta \prod_{i=1}^{n} q_i + 2 \prod_{i=1}^{n} r_i\right],$$

$$\text{Ordre } J_n = \tfrac{1}{2}\left[2^\beta \prod_{i=1}^{n} q_i - 2 \prod_{i=1}^{n} r_i\right],$$

PGCD (ordre I_n, ordre J_n) $= 2^\alpha s_n$ avec s_n impair d'où, finalement, $\alpha = \alpha'$.

(ii) Les symétries θ et θ' vérifient simultanément $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{I})$. Dans le premier cas,

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'} = 0.$$

Dans le second cas, $\bar{\theta} = \operatorname{Ad} U$, $\bar{\theta}' = \operatorname{Ad} U'$ où U et U' sont des unitaires du facteur hyperfini $\mathbf{R}$ de type II_1. Si $\theta' = \sigma\theta\sigma^{-1}$, $\bar{\theta}' = \bar{\sigma}\bar{\theta}\bar{\sigma}^{-1}$ et $U' = \lambda\bar{\sigma}(U)$ $(|\lambda| = 1)$ d'où $|\operatorname{Tr}(U)| = |\operatorname{Tr}(U')|$. Or $|\operatorname{Tr}(U)| = \prod_{i=1}^{\infty} r_i/q_i$ (cf. [**2**, lemme 1.3.8, p. 154]), d'où

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}.$$

3.2.2. Proposition, *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries possédant la propriété $(\mathscr{U})$. On suppose que θ et θ' sont conjuguées. Alors:*

(i) *$N(\mathscr{R})$ est équivalent à $N(\mathscr{R}')$,*
(ii) *$\prod_{i=2}^{\infty} r_i/q_i = \delta(q_1/q_1') \prod_{i=2}^{\infty} r_i'/q_i'$ où $u \mapsto \delta u$ est un isomorphisme de $[N(\mathscr{R})]$ sur $[N(\mathscr{R}')]$.*

Preuve. (i) résulte de 3.1.3(i), et (ii) se démontre comme 3.1.3(ii).

4. Classification des symétries à conjugaison près.

4.1. Theoreme. *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries ne vérifiant pas*

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

($\mathscr{U}$). *Alors, θ est conjugué à θ' si et seulement si*

(1) $N(\mathscr{R}) = N(\mathscr{R}')$;

(2) $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}$.

Preuve. Si θ et θ' sont conjugués, les conditions 1) et 2) sont vérifiées en vertu de la prop. 3.2.1. Supposons ces conditions vérifiées, et montrons que θ est conjugué à θ'.

1*er pas*: Construisons deux suites strictement croissantes d'entiers

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i_{n+1} < \ldots$$
$$j_1 < j_2 < \ldots < j_n < j_{n+1} < \ldots$$

telles que si l'on pose

$$\rho_1 = r_1 \ldots r_{i_1}, \quad \rho_2 = r_{i_1+1} \ldots r_{i_2}, \quad \ldots, \quad \rho_n = r_{i_{n-1}+1} \ldots r_{i_n}, \quad \ldots$$
$$\mu_1 = q_1 \ldots q_{i_1}, \quad \mu_2 = q_{i_1+1} \ldots q_{i_2}, \quad \ldots, \quad \mu_n = q_{i_{n-1}+1} \ldots q_{i_n}, \quad \ldots$$
$$\rho_1' = r_1' \ldots r_{j_1}', \quad \rho_2' = r_{j_1+1}' \ldots r_{j_2}', \quad \ldots, \quad \rho_n' = r_{j_{n-1}+1}' \ldots r_{j_n}', \quad \ldots$$
$$\mu_1' = q_1' \ldots q_{j_1}', \quad \mu_2' = q_{j_1+1}' \ldots q_{j_2}', \quad \ldots, \quad \mu_n' = q_{j_{n-1}+1}' \ldots q_{j_n}', \quad \ldots$$

on ait les propriétés suivantes:

(a) $\rho_1 | \rho_1' | \rho_1\rho_2 | \rho_1'\rho_2' | \ldots | \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n | \rho_1'\rho_2' \ldots \rho_n' | \rho_1\rho_2 \ldots \rho_{n+1} | \ldots$

(b) $\mu_1 | \mu_1' | \mu_1\mu_2 | \mu_1'\mu_2' | \ldots | \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n | \mu_1'\mu_2' \ldots \mu_n' | \mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n+1} | \ldots$

(c) $\frac{\rho_1}{\mu_1} \geqq \frac{\rho_1'}{\mu_1'} \geqq \frac{\rho_1\rho_2}{\mu_1\mu_2} \geqq \frac{\rho_1'\rho_2'}{\mu_1'\mu_2'} \geqq \ldots$

$$\geqq \frac{\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n} \geqq \frac{\rho_1'\rho_2' \ldots \rho_n'}{\mu_1'\mu_2' \ldots \mu_n'} \geqq \frac{\rho_1\rho_2 \ldots \rho_{n+1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n+1}} \geqq \ldots$$

(d) les quotients successifs des termes de la suite (a) ont même parité que les quotients correspondants de la suite (b), i.e.: ρ_1'/ρ_1 a même parité que μ_1'/μ_1, $\rho_1\rho_2/\rho_1'$ a même parité que $\mu_1\mu_2/\mu_1'$, etc. . . .

Nous allons construire les suites (i_n) et (j_n) par récurrence en déduisant (a) du fait que $N(\mathscr{R}) = N(\mathscr{R}')$, (b) de la condition $N(\mathscr{Q}) = N(\mathscr{Q}')$ qui est réalisée d'après la condition d'isomorphisme de deux C^*-algèbres UHF (cf. [**5**, thm. 3.2, p. 194]) et (c) de l'hypothèse $\prod_{i=1}^{\infty} r_i/q_i = \prod_{i=1}^{\infty} r_i'/q_i'$. Construisons tout d'abord la suite $(i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n, \ldots)$ par récurrence de manière à vérifier (a), (b) et (c). Choisissons arbitrairement i_1. Puisque $N(\mathscr{R}) = N(\mathscr{R}')$ et $N(\mathscr{Q}) = N(\mathscr{Q}')$, il existe un entier n tel que $\rho_1 | r_1' \ldots r_n'$ et $\mu_1 | q_1' \ldots q_n'$.

Comme $\prod_{i=1}^{n} r_i'/q_i'$ converge en décroissant vers $\prod_{i=1}^{\infty} r_i/q_i < \rho_1/\mu_1$, il existe m tel que $\prod_{i=1}^{m} r_i'/q_i' < \rho_1/\mu_1$. On pose alors $j_1 = \max(n, m)$. En échangeant les rôles de θ et θ', on construit de même i_2 à partir de j_1, puis j_2 à partir de i_2, etc. ... On a ainsi construit une suite $(i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n, \ldots)$ vérifiant (a), (b) et (c).

De plus, n étant fixé, i_{n+1} et j_{n+1} peuvent être choisis aussi grands que désiré. Montrons que cela permet de réaliser la condition (d). Comme r_n et q_n sont de même parité, trois cas sont à distinguer:

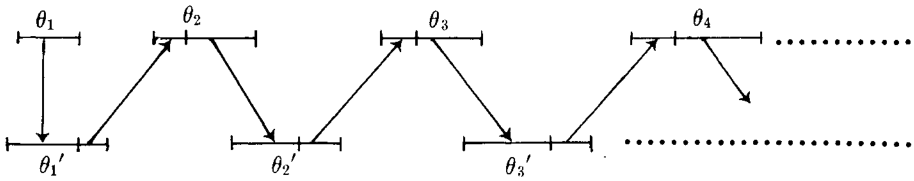
1*er cas*: 2 n'intervient ni dans $N(\mathscr{Q})$, ni dans $N(\mathscr{R})$. La condition (d) est alors automatiquement vérifiée car tous les quotients considérés sont impairs.

2*ème cas*: $N(\mathscr{Q}) = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\ldots$, $N(\mathscr{R}) = 2^{\beta_1}3^{\beta_2}\ldots$ avec α_1, β_1 finis et non nuls. Pour assurer (d), il suffit alors de choisir i_1 et j_1 suffisamment grands pour que q_n (resp. q_n') soit impair pour $n > i_1$ (resp. $n > j_1$). Alors, r_n (resp. r_n') est impair pour $n > i_1$ (resp. $n > j_1$) et tous les quotients considérés sont impairs.

3*ème cas*: 2 intervient à une puissance infinie dans $N(\mathscr{Q})$, donc aussi dans $N(\mathscr{R})$. Pour vérifier (d), il suffit de choisir, à n fixé, i_n et j_n suffisamment grands pour que les quotients successifs des suites de (a) et (b) soient tous pairs.

2*ème pas*: En faisant des groupements convenables de termes successifs, on peut supposer d'après ce qui précède que les r_n (resp. r_n', q_n, q_n') vérifient les conditions imposées aux ρ_n (resp. ρ_n', μ_n, μ_n').

Cela va nous permettre de faire une démonstration analogue à celle du théorème de Cantor-Bernstein suivant le schéma ci-dessous:



Pour tout n, on a les décompositions

$$K_n' = G_n{}^1 \otimes G_n{}^2$$
$$\theta_n' = \alpha_n' \otimes \beta_n'$$

avec:

1⁰) $G_n{}^1$ (resp. $G_n{}^2$) est un facteur d'ordre $(q_1 \ldots q_n)/(q_1' \ldots q_{n-1}')$ (resp. $(q_1' \ldots q_n')/(q_1 \ldots q_n)$) en convenant que $G_1{}^1$ est d'ordre q_1,

2⁰) L'excédent de valeurs propres $+1$ de α_n' (resp. β_n') est égal à $(r_1 \ldots r_n)/(r_1' \ldots r_{n-1}')$ (r_1 pour $n = 1$) (resp. $(r_1' \ldots r_n')/(r_1 \ldots r_n)$). Ces décompositions sont possibles car

$$q_n' = \left(\frac{q_1 \ldots q_n}{q_1' \ldots q_{n-1}'}\right) \times \left(\frac{q_1' \ldots q_n'}{q_1 \ldots q_n}\right)$$

$$r_n' = \left(\frac{r_1 \ldots r_n}{r_1' \ldots r_{n-1}'}\right) \times \left(\frac{r_1' \ldots r_n'}{r_1 \ldots r_n}\right)$$

et $(r_1 \ldots r_n)/(r_1' \ldots r_{n-1}')$ (resp. $(r_1' \ldots r_n')/(r_1 \ldots r_n)$) est inférieur à $(q_1 \ldots q_n)/(q_1' \ldots q_{n-1}')$ (resp. $(q_1' \ldots q_n')/(q_1 \ldots q_n)$) tout en ayant même parité. On a alors:

$$\theta' = \alpha_1' \otimes (\beta_1' \otimes \alpha_2') \otimes (\beta_2' \otimes \alpha_3') \otimes \ldots \otimes (\beta_{n-1}' \otimes \alpha_n') \otimes \ldots$$

Or α_1' et conjugué à θ_1 et $\beta_{n-1}' \otimes \alpha_n'$ est conjugué à θ_n puisque

$$\frac{q_1' \ldots q_{n-1}'}{q_1 \ldots q_{n-1}} \times \frac{q_1 \ldots q_n}{q_1' \ldots q_{n-1}'} = q_n \quad \text{et}$$

$$\frac{r_1' \ldots r_{n-1}'}{r_1 \ldots r_{n-1}} \times \frac{r_1 \ldots r_n}{r_1' \ldots r_{n-1}'} = r_n.$$

Il s'ensuit que θ' est conjugué à θ.

4.2. COROLLAIRE. *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries vérifiant $(\mathscr{E})$ mais pas $(\mathscr{U})$. Alors θ est conjugué à θ' si et seulement si $N(\mathscr{R}) = N(\mathscr{R}')$.*

4.3. THEOREME. *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries vérifiant la propriété $(\mathscr{U})$. Alors θ est conjugué à θ' si et seulement si:*

1^0) *$N(\mathscr{R}) \sim N(\mathscr{R}')$,*

2^0) *$\prod_{i=2}^{\infty} r_i/q_i = \delta(q_1/q_1') \prod_{i=2}^{\infty} r_i'/q_i'$ où δ est un rationnel tel que $u \mapsto \delta u$ soit un isomorphisme de $[N(\mathscr{R})]$ sur $[N(\mathscr{R}')]$.*

Preuve. Les conditions sont nécessaires d'après la proposition 3.2.2. Inversement, supposons ces conditions vérifiées et montrons que θ est conjugué à θ'. Comme ici $r_1 = 0$, on ne change pas la classe de conjugaison de θ en modifiant un nombre fini de r_i. En effet, si $r_2, \ldots, r_n$ sont remplacés par $\rho_2, \ldots, \rho_n$, $\theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ est remplacé par

$$\theta_{(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots)}^{(0, \rho_2, \ldots, \rho_n, r_{n+1}, \ldots)}$$

et ces deux automorphismes sont conjugués à

$$\theta_{(q_1 q_2 \ldots q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots)}^{(\quad 0 \quad, r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots)}.$$

De plus, l'hypothèse 2^0) est encore vérifiée quand on remplace les r_i par les ρ_i. Dans ce qui suit, nous utiliserons constamment ces remarques.

Montrons d'abord que l'on peut supposer: (a) $q_1 = q_1'$; (b) q_i et q_i' sont impairs pour $i \geqq 2$ si $N(\mathscr{Q}) = N(\mathscr{Q}') = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2} \ldots$ avec $0 < \alpha_1 < +\infty$. Soit m un entier tel que:

$$q_1 | q_1' \ldots q_m'$$
$$q_1' | q_1 \ldots q_m$$
$$2^{\alpha_1} | q_1' \ldots q_m' \quad \text{et} \quad 2^{\alpha_1} | q_1 \ldots q_n \quad \text{si } N(\mathscr{Q}) = N(\mathscr{Q}') = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2} \ldots$$

avec $0 < \alpha_1 < +\infty$. Soit q le PGCD de $q_1 \ldots q_m$ et $q_1' \ldots q_m'$. On a $q_1 \ldots q_m = ql$ et $q_1' \ldots q_m' = ql'$, de sorte que si r (resp. r') est un entier quelconque de même parité que l et majoré par l (resp. l'), θ (resp. θ') est conjugué à

$$\theta_{(q, l, q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots)}^{(0, r, r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots)} \quad (\text{resp. à } \theta_{(q, l', q'_{m+1}, q'_{m+2}, \ldots)}^{(0, r', r'_{m+1}, r'_{m+2}, \ldots)}).$$

On peut donc supposer les conditions (a) et (b) vérifiées.

Modifions maintenant un nombre fini de r_i et de r_i' de façon à ce que $\theta_2 \otimes \theta_3 \otimes \ldots$ et $\theta_2' \otimes \theta_3' \otimes \ldots$ vérifient les conditions du théorème 4.1. Posons

$$N(\mathscr{R}) = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots$$
$$N(\mathscr{R}') = d_1^{\alpha_1'} d_2^{\alpha_2'} \ldots$$
$$A = \{i \in \mathbf{N} | \alpha_i > \alpha_i'\}$$
$$A' = \{i \in \mathbf{N} | \alpha_i < \alpha_i'\}$$
$$C = \{i \in \mathbf{N} | \alpha_i = \alpha_i' = +\infty\}.$$

Puisque $u \mapsto \delta u$ est un isomorphisme de $[N(\mathscr{R})]$ sur $[N(\mathscr{R}')]$, il existe une partie finie D de C telle que:

$$\delta = \prod_{i \in A \cup A'} d_i^{\alpha_i - \alpha_i'} \prod_{i \in D} d_i^{\beta_i} \quad (\beta_i \in \mathbf{Z}).$$

Soient $B = \{i \in D | \beta_i > 0\}$ et $B' = \{i \in D | \beta_i < 0\}$. La condition 2°) s'écrit maintenant:

$$\prod_{i \in A} \frac{1}{d_i^{\alpha_i - \alpha_i'}} \prod_{i \in B} \frac{1}{d_i^{\beta_i}} \prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i}{q_i} = \prod_{i \in A'} \frac{1}{d_i^{\alpha_i' - \alpha_i}} \prod_{i \in B'} \frac{1}{d_i^{-\beta_i}} \prod_{i=2}^{\infty} \frac{r_i'}{q_i'}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$\prod_{i \in A} d_i^{\alpha_i - \alpha_i'} \prod_{i \in B} d_i^{\beta_i} \,\Big|\, \prod_{i=2}^{n} r_i$$

et que le quotient correspondant ait même parité que $q_2 \ldots q_n$ (Ceci est possible à cause de (b)). En regroupant les termes de $i = 2$ à $i = n$, on peut supposer $n = 2$ et remplacer r_2 par

$$\rho_2 = \frac{r_2}{\prod_{i \in A} d_i^{\alpha_i - \alpha_i'} \prod_{i \in B} d_i^{\beta_i}}.$$

De même, on peut remplacer r_2' par

$$\rho_2' = \frac{r_2'}{\prod_{i \in A'} d_i^{\alpha_i' - \alpha_i} \prod_{i \in B'} d_i^{-\beta_i}}.$$

Les conditions du théorème 4.1 sont alors vérifiées et $\theta_2 \otimes \theta_3 \otimes \ldots$ est conjugué à $\theta_2' \otimes \theta_3' \otimes \ldots$ Comme $q_1 = q_1'$ (condition (a)), θ est conjugué à θ'.

4.4. COROLLAIRE. *Soient $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}^{\mathscr{R}'}$ deux symétries vérifiant les propriétés $(\mathscr{U})$ et $(\mathscr{E})$. Alors, θ et θ' sont conjugués si et seulement si $N(\mathscr{R})$ et $N(\mathscr{R}')$ sont équivalents.*

5. Classification des symétries à conjugaison extérieure près. Comme la classe de conjugaison extérieure de $\theta_{\mathscr{Q}}^{\mathscr{R}}$ ne change pas quand on modifie un nombre fini de r_i, nous supposerons dans le théorème ci-dessous que $r_i \neq 0$ pour tout i.

5.1. THEOREME. *Soient* $\theta = \theta_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}}$ *et* $\theta' = \theta_{\mathscr{D}'}^{\mathscr{R}'}$ *deux symétries. Alors*, θ *et* θ' *sont extérieurement conjuguées si et seulement si:*

1°) $N(\mathscr{R})$ *et* $N(\mathscr{R}')$ *sont équivalents;*

2°) $\prod_{i=1}^{\infty} r_i/q_i = \delta \prod_{i=1}^{\infty} r_i'/q_i'$ *ou* δ *est un rationnel tel que* $u \mapsto \delta u$ *soit un isomorphisme de* $[N(\mathscr{R})]$ *sur* $[N(\mathscr{R}')]$.

Preuve. Les conditions 1°) et 2°) sont nécessaires en vertu de 3.1.3. Inversement, si 1°) et 2°) sont vérifiées, on peut modifier un nombre fini de r_i et de r_i' de façon à obtenir deux automorphismes conjugués (cf. la démonstration du théorème 4.3). Or la modification d'un nombre fini de r_i ne change pas la classe de conjugaison extérieure de θ, d'où notre théorème.

5.2. COROLLAIRE. *Soient* $\theta = \theta_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}}$ *et* $\theta' = \theta_{\mathscr{D}'}^{\mathscr{R}'}$ *deux symétries vérifiant la propriété* $(\mathscr{E})$. *Alors*, θ *et* θ' *sont extérieurement conjugués si et seulement si* $N(\mathscr{R})$ *et* $N(\mathscr{R}')$ *sont équivalents.*

5.3. COROLLAIRE. *Soient* θ *et* θ' *deux symétries vérifiant la propriété* $(\mathscr{U})$. *Alors* θ *et* θ' *sont conjugués si et seulement si ils sont extérieurement conjugués.*

5.4. COROLLAIRE. *Soient* $\theta = \theta_{\mathscr{D}}^{\mathscr{R}}$ *et* $\theta' = \theta_{\mathscr{D}'}^{\mathscr{R}'}$ *deux symétries extérieurement conjuguées. Alors, il existe une décomposition* $\mathscr{D} = K \otimes \mathscr{D}_1$ *ou* K *est un facteur de dimension finie, et un automorphisme* α *de* $\mathscr{D}_1$ *tels que* θ *soit conjugué à* $\operatorname{Ad} U \otimes \alpha$, *et* θ' *soit conjugué à* $\operatorname{Ad} V \otimes \alpha$ *avec* U, V *unitaires de* K.

Preuve. Nous supposerons r_1 et r_1' non nuls, la démonstration étant analogue si r_1 ou r_1' est nul. Il résulte de la démonstration du théorème 4.3 que l'on peut supposer $r_1 = \gamma\, \rho_1$, $r_1' = \gamma' \rho_1'$ avec

(a) $N(\rho_1, r_2, r_3, \ldots) = N(\rho_1', r_2', r_3', \ldots)$

(b) $\dfrac{\rho_1}{q_1} \prod_{i=2}^{\infty} \dfrac{r_i}{q_i} = \dfrac{\rho_1'}{q_1'} \prod_{i=2}^{\infty} \dfrac{r_i'}{q_i'}$

(c) q_n et q_n' sont impairs pour $n \geqq 2$ si 2 intervient dans $N(\mathscr{Q})$ a une puissance finie non nulle.

Supposons $\gamma \leqq \gamma'$. D'après (a), (b) et (c), il existe un entier n tel que:

$$\rho_1' | \rho_1 r_2 r_3 \ldots r_n,\ q_1' | q_1 q_2 q_3 \ldots q_n,$$

$$\frac{\rho_1 r_2 r_3 \ldots r_n}{q_1 q_2 q_3 \ldots q_n} \leqq \frac{\rho_1'}{q_1'},$$

$$\frac{\rho_1 r_2 r_3 \ldots r_n}{\rho_1'} \text{ ayant même parité que } \frac{q_1 q_2 q_3 \ldots q_n}{q_1'}.$$

Comme en 4.1, ceci prouve que θ est conjugué à $\tilde{\theta}_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\tilde{\mathscr{R}}}$ avec

$$\tilde{\mathscr{R}} = (\gamma\rho_1', \rho_1 r_2 r_3 \dots r_n/\rho_1', r_{n+1}, r_{n+2}, \dots)$$
$$\tilde{\mathscr{Q}} = (q_1', q_1 q_2 q_3 \dots q_n/q_1', q_{n+1}, q_{n+2}, \dots).$$

Or $\tilde{\theta}_{\tilde{\mathscr{Q}}}^{\tilde{\mathscr{R}}} = \tilde{\theta}_1 \otimes (\tilde{\theta}_2 \otimes \tilde{\theta}_3 \otimes \dots)$ avec $\tilde{\theta}_2 \otimes \tilde{\theta}_3 \otimes \dots$ conjugué à $\theta_2 \otimes \theta_3 \otimes \dots$ en vertu des conditions (a), (b) et du théorème 4.1. Ceci prouve notre corollaire avec $K = K_1'$, $\mathscr{D}_1 = K_2' \otimes K_3' \otimes \dots$ et $\alpha = \theta_2' \otimes \theta_3' \otimes \dots$

6. Remarques diverses.

6.1. *Structures Boréliennes de* $\mathscr{C}_e(\mathscr{D})$ *et* $\mathscr{C}(\mathscr{D})$. Le groupe Aut $(\mathscr{D})$ des automorphismes de $\mathscr{D}$, muni de la topologie de la convergence simple-normique, est un groupe Polonais. Nous noterons $\mathscr{C}(\mathscr{D})$ (resp. $\mathscr{C}_e(\mathscr{D})$) l'ensemble des classes de conjugaison (resp. conjugaison extérieure) d'éléments de Aut $(\mathscr{D})$, muni de la structure Borélienne quotient.

6.1.1. PROPOSITION. $\mathscr{C}_e(\mathscr{D})$ *n'est pas dénombrablement séparé.*

Preuve. Fixons une décomposition de $\mathscr{D}$ en $\bigotimes_{n\geqq 1} K_n$; soient q_n l'ordre de K_n et $\mathscr{Q} = (q_1, q_2, \dots)$.

1*er cas.* 2 n'intervient pas dans $N(\mathscr{Q})$. L'ensemble des entiers généralisés $d_2^{\alpha_2} d_3^{\alpha_3} \dots$ $(d_2 = 3)$ tels que $\alpha_n < +\infty$ pour tout n, est de manière naturelle en bijection avec $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ considéré comme l'ensemble des suites d'entiers $(\alpha_2, \alpha_3, \dots)$. A l'élément $s = (\alpha_2, \alpha_3, \dots)$ de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, on fait correspondre l'entier généralisé $\varphi(s) = d_2^{\alpha_2} d_3^{\alpha_3} \dots$. La relation d'équivalence des entiers généralisés correspond à l'égalité des suites sauf pour un nombre fini d'indices. Nous allons construire une application Borélienne $s \mapsto T(s)$ de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ dans Aut $(\mathscr{D})$ telle que, pour tout $s \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, $T(s)$ soit une symétrie de $(\mathscr{E})$ vérifiant $N(T(s)) = \varphi(s)$.

D'après 5.2, l'application T définira une injection Borélienne du quotient de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathscr{C}_e(\mathscr{D})$, ce qui démontrera la proposition.

Soit $K_n = \mathscr{L}(H_n)$. Pour tous (n, m) tels que $n \leqq m$, fixons une base orthonormale de $H_n \otimes \dots \otimes H_m$. Soit $s = (\alpha_2, \alpha_3, \dots)$. Définissons par récurrence la suite d'entiers $(n_1, n_2, \dots)$ de la façon suivante: n_1 est le plus petit entier tel que $d_2^{\alpha_2} \leqq \frac{1}{2} q_1 q_2 \dots q_{n_1}$, n_2 est le plus petit entier $n > n_1$ tel que $d_3^{\alpha_3} \leqq \frac{1}{2} q_{1+n_1} \dots q_{n_2}$ et n_{p+1} est le plus petit entier $n > n_p$ tel que

$$d_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \leqq \tfrac{1}{2} q_{1+n_{p-1}} \dots q_{n_p}.$$

Soit $\theta_p = \mathrm{Ad}\, U_p$ où U_p est l'unitaire de $K_{1+n_{p-1}} \otimes \dots \otimes K_{n_p}$ diagonalisé dans la base choisie pour $H_{1+n_{p-1}} \otimes \dots \otimes H_{n_p}$, les premiers vecteurs de la base correspondant à la valeur propre $+1$, les derniers à la valeur propre -1, et tel que U_p ait un excédent de valeurs propres $+1$ égal à $d_{p+1}^{\alpha_{p+1}}$. Posons $T(s) = \bigotimes_{p\geqq 1} \theta_p$. Par construction, on a $N(T(s)) = \varphi(s)$ et la condition

$$d_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \leqq \tfrac{1}{2} q_{1+n_{p-1}} \dots q_{n_p}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

montre que Tr $U_p \leqq \frac{1}{2}$ donc $\prod_{p\geqq 1}$ Tr $(U_p) = 0$ et $T(s) \in (\mathscr{E})$. Il reste à montrer que T est Borélienne. Soit T_n l'application de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ dans Aut $(\mathscr{D})$ définie par $T_n(s) = T(\alpha_2, \ldots, \alpha_n, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Comme T_n se factorise à travers $\mathbf{N}^{n-1}$ qui est discret, T_n est continue. Comme $n_p > p$, on a pour tout $x \in K_1 \otimes \ldots \otimes K_p$, $T_n(s)(x) = T(s)x$ pour $n \geqq p$, ce qui montre que $T(s) = \lim T_n(s)$ dans Aut $(\mathscr{D})$, d'où $T = \lim T_n$ est Borélienne.

2ème cas. 2 intervient à une puissance finie non nulle dans $N(\mathscr{Q})$. En regroupant des termes, on suppose alors q_1 pair et q_n impair pour tout $n \geqq 2$. Le raisonnement est le même, sauf que l'on considère les suites $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ telles que $\alpha_1 \neq 0$ et que l'on définit $\varphi(s) = 2^{\alpha_1}d_2{}^{\alpha_2}d_3{}^{\alpha_3} \ldots$.

3ème cas. 2 intervient à une puissance infinie dans $N(\mathscr{Q})$. En regroupant des termes, on suppose que q_n est pair pour tout $n \in \mathbf{N}$. On considère les mêmes suites $s = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ que dans le premier cas, et l'on définit $\varphi(s) = 2^{\infty}d_2{}^{\alpha_2}d_3{}^{\alpha_3} \ldots$ La construction est la même, sauf que l'on impose

$$d_{p+1}{}^{\alpha_p+1} \leqq \frac{1}{4}\, q_{1+n_{p-1}} \ldots q_{n_p}$$

et que l'excédent de valeurs propres $+1$ de U_p est égal à $2\, d_{p+1}{}^{\alpha_p+1}$.

6.1.2. *Remarque.* Le même raisonnement que précédemment montre que si 2 intervient à une puissance non nulle dans $N(\mathscr{Q})$, $\mathscr{C}(\mathscr{D})$ n'est pas dénombrablement séparé. En effet, on peut écrire $\mathscr{D} = F_2 \otimes \mathscr{D}'$ et construire l'application T' de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ dans Aut $(\mathscr{D})$ par $T'(s) = \theta_1 \otimes T(s)$ où θ_1 a un excédent de valeurs propres $+1$ nul, et où $T(s)$ est l'automorphisme précédemment construit. On a: $T'(s)$ vérifie $(\mathscr{U})$ et $(\mathscr{E})$, $N(T'(s)) = \varphi(s)$ et le corollaire 4.4 montre que T' définit une injection Borélienne du quotient de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathscr{C}(\mathscr{D})$.

Par contre, si 2 n'intervient pas dans $N(\mathscr{Q})$, aucune symétrie n'appartient à $(\mathscr{U})$ et, d'après 4.1, la classification des symétries à conjugaison près se fait à l'aide d'un sous-ensemble de $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \times [0, 1]$ qui est dénombrablement séparé.

6.2. *Relations entre conjugaison et isomorphisme de l'algèbre des points fixes.* Si θ et θ' sont deux automorphismes conjugués, $\mathscr{D}^\theta$ et $\mathscr{D}^{\theta'}$ sont isomorphes. La réciproque est fausse. Ainsi,

$$\theta = \theta_{(9,9,9,\ldots)}^{(5,3,3,\ldots)}$$

n'est pas conjugué à

$$\theta' = \theta_{(9,9,9,\ldots)}^{(7,3,3,\ldots)}$$

alors que $\mathscr{D}^\theta$ est isomorphe à $\mathscr{D}^{\theta'}$.

Pour montrer cette dernière assertion, il suffit (cf. [**7**, thm. 4.3, page 32]) de trouver un isomorphisme de G_θ sur $G_{\theta'}$ conservant l'ordre et préservant l'identité. D'après le § 2.4, il revient au même de trouver un rationnel d et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, des entiers $m, m' \in \mathbf{N}$ et $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{Z}$ (resp. $\lambda', \mu', \nu' \in \mathbf{Z}$) de même

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

parité, tels que l'on ait:

(1) $\frac{1}{9^n} = \frac{\lambda}{9^m}$

(2) $\frac{5d-7}{9^n} - \frac{d}{3^{n-1}} = \frac{\mu}{3^{m-1}}$

(3) $\frac{5d-7}{9^n} + \frac{d}{3^{n-1}} = \frac{\nu}{3^{m-1}}$

(1′) $\frac{1}{9^n} = \frac{\lambda'}{9^{m'}}$

(2′) $\frac{7-5d}{d\,9^n} - \frac{1}{d\,3^{n-1}} = \frac{\mu'}{3^{m'-1}}$

(3′) $\frac{7-5d}{d\,9^n} + \frac{1}{d\,3^{n-1}} = \frac{\nu'}{3^{m'-1}}$

(l'équation (4) est automatiquement vérifiée car θ et θ' vérifient $(\mathscr{E})$).

On peut choisir $d = 1$, et il est clair que le système des équations écrites ci-dessus admet pour tout n des solutions en m, λ, μ, ν et λ', μ', ν'.

6.3. *Relations entre conjugaison extérieure et isomorphisme de l'algèbre des points fixes.* Si θ et θ' sont deux symétries vérifiant la propriété $(\mathscr{E})$, on a: $\mathscr{D}^\theta$ isomorphe à $\mathscr{D}^{\theta'} \Rightarrow \theta$ extérieurement conjugué à θ'. La réciproque est cependant fausse.

Supposons $\mathscr{D}^\theta$ isomorphe à $\mathscr{D}^{\theta'}$. Comme θ et θ' vérifient la propriété $(\mathscr{E})$, le cône positif de G_θ (resp. $G_{\theta'}$) est l'intersection avec G_θ (resp. $G_{\theta'}$) du demi-plan limité par la seconde bissectrice et contenant $[I]$. L'isomorphisme de $\mathscr{D}^\theta$ sur $\mathscr{D}^{\theta'}$ détermine alors un isomorphisme de G_θ sur $G_{\theta'}$ conservant la seconde bissectrice, donc du type considéré en 2.4. Comme dans 3.1.3 (i), on voit que $N(\mathscr{R})$ est équivalent à $N(\mathscr{R}')$, et θ est extérieurement conjugué à θ' en vertu du corollaire 5.2.

Pour prouver que la réciproque est fausse en général, considérons l'exemple suivant: $\theta = \theta_{\mathscr{Q}}{}^{\mathscr{R}}$ et $\theta' = \theta_{\mathscr{Q}'}{}^{\mathscr{R}'}$ avec $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}' = (2^3, 5, 5, \ldots)$, $\mathscr{R} = (2, 3, 3, \ldots)$, $\mathscr{R}' = (2^2, 3, 3, \ldots)$. Il est clair que θ est extérieurement conjugué à θ'.

Cependant:

$$\text{Ordre } I_n = \tfrac{1}{2}(2^3 \times 5^{n-1} + 2 \times 3^{n-1})$$
$$\text{Ordre } J_n = \tfrac{1}{2}(2^3 \times 5^{n-1} - 2 \times 3^{n-1}) \quad \text{et}$$

PGCD (ordre I_n, ordre J_n) $= 1$; de façon analogue PGCD (ordre I_n', ordre J_n') $= 2$ et $\mathscr{D}^\theta$ ne peut pas être isomorphe à $\mathscr{D}^{\theta'}$ en vertu du lemme 2.1.4.

6.4. *Relations entre conjugaison, conjugaison extérieure, et isomorphisme du produit croisé.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-055-7 Published online by Cambridge University Press

6.4.1. *Soient θ, θ' deux symétries de $\mathscr{D}$, $\tilde{\mathscr{D}} = F_2 \otimes \mathscr{D}$ et β (resp. β') l'isomorphisme* Ad $U \otimes \theta$ (*resp.* Ad $U \otimes \theta'$) *où* Ad U *est la symétrie de F_2 distincte de l'identité. Alors, θ est extérieurement conjugué* à θ' *si et seulement si β est conjugué à β'.*

Cela résulte immédiatement des théorèmes 5.1 et 4.3.

6.4.2. *Soient θ et θ' deux symétries vérifiant la propriété ($\mathscr{E}$). Alors, θ est extérieurement conjuguée à θ' si et seulement si $C^*(\mathscr{D}, \theta)$ est isomorphe à $C^*(\mathscr{D}, \theta')$.*

Cela résulte de 6.3 et 6.4.1, sachant que $\tilde{\mathscr{D}}^\beta$ est isomorphe à $C^*(\mathscr{D}, \theta)$.

6.5. *Loi de composition sur l'ensemble des classes de conjugaison d'automorphismes vérifiant ($\mathscr{E}$).* Pour tout automorphisme θ de $\mathscr{D}$, on note $[\theta]$ sa classe de conjugaison. Soit $\mathscr{D}$ une C^*-algèbre UHF isomorphe à $\mathscr{D} \otimes \mathscr{D}$ et soit σ un isomorphisme de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D} \otimes \mathscr{D}$. On vérifie facilement que la formule

$$[\theta].[\theta'] = [\sigma^{-1}(\theta \otimes \theta')\sigma]$$

définit une loi de composition interne sur l'ensemble des classes de conjugaison d'automorphismes de $\mathscr{D}$, qui ne dépend pas de σ. La restriction de cette loi aux symétries possédant la propriété ($\mathscr{E}$) admet un élément neutre, à savoir $\epsilon = [\theta_{\mathscr{D}}{}^{\mathscr{R}}]$ ou $r_n = 1$ ou 2 suivant la parité de q_n. Cependant, si $[\theta] \neq \epsilon$, $[\theta]$ n'admet pas d'inverse et le monoïde mis en évidence n'est pas simplifiable. La considération de ϵ permet de simplifier la démonstration du théorème 4.1 dans le cas des symétries vérifiant ($\mathscr{E}$).

Bibliographie

1. O. Bratelli, *Inductive limits of finite dimensional C*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *171* (1972), 195–234.
2. A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. *6* (1973), 133–252.
3. ——— *Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1*, Queen's preprint *25* (1974).
4. ——— *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. *8* (1975), 383–420.
5. J. Dixmier, *On some C*-algebras considered by Glimm*, J. Funct. Analysis (1967), p. 182–203.
6. J. Dixmier et E. C. Lance, *Deux nouveaux facteurs de type II_1*, Inventiones Math. *7* (1969), 226–234.
7. G. A. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semi simple finite-dimensional algebras*, J. Algebra (1976), 29–44.
8. J. G. Glimm, *On a certain class of operator algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *95* (1960), 318–340.
9. J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Ann. of Math. Studies (Princeton University Press, 1971).

10. D. Olesen, G. K. Pedersen, and E. Størmer, *Periodic automorphisms of simple C*-algebras* (Preprint), Københavns Universitet.

11. G. Zeller-Meier, *Produit croisé d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes*, J. Math. Pures et Appl. *47* (1968), 102–239.

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique,
Route de Saclay, 91120 *Palaiseau, France;*
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,
Université Pierre et Marie Curie,
UER 48, *Aile* 45–46, 3*e* *étage,* 4, *Place Jussieu,* 75230 *Paris Cedex* 05