J. Inst. Math. Jussieu (2025), 1–59
doi:10.1017/S1474748025000106

FONCTIONS ADDITIVES EN BASE DE CANTOR LE LONG DES NOMBRES PREMIERS

GUY BARAT[1], BRUNO MARTIN[2], CHRISTIAN MAUDUIT[3,†], JOËL RIVAT[4]

[1] *Institut für Analysis und Zahlentheorie, Technische Universität Graz, Kopernikusgasse 24/II, 8010 Graz, Austria*
(guy.barat@tugraz.at)

[2] *Univ. Littoral Côte d'Opale, EA 2797 – LMPA – Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville, F-62228 Calais, France*
(bruno.martin@univ-littoral.fr)

[3] *Université d'Aix-Marseille, Institut Universitaire de France, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France*

[4] *Université d'Aix-Marseille, Institut Universitaire de France, Institut de Mathématiques de Marseille CNRS UMR 7373, 163 avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France*
(joel.rivat@univ-amu.fr)

(Received 8 January 2024; revised 4 February 2025; accepted 12 February 2025)

Résumé Étant donnée une suite $A=(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers naturels tous au moins égaux à 2, on pose $q_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $q_{n+1}=a_nq_n$. Tout nombre entier naturel $n\geqslant 1$ admet une unique représentation dans la base A, dite de Cantor, de la forme

$$m=\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon_j(m)q_j \quad \text{avec} \quad 0\leqslant \varepsilon_j(m)<a_j=\frac{q_{j+1}}{q_j}.$$

Dans cet article, nous évaluons la somme

$$S=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n)$$

où Λ est la fonction de von Mangoldt et f une fonction fortement multiplicative en base A. L'estimation des sommes de type I et II associées repose sur le bon contrôle de transformées de Fourier discrètes de fonctions construites à partir de f par décalage dans la numération en base A. Cette approche pouvant échouer si la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est trop irrégulière, nous introduisons la notion de base de Cantor *tempérée* et obtenons dans ce cadre une majoration générale de la somme S.

† Author is deceased.

Keywords: prime numbers; exponential sums; Cantor expansions; sum of digits

2020 Mathematics subject classification: Primary 11A63; 11J71; 11L20
Secondary 11N05

© The Author(s), 2025. Published by Cambridge University Press.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Nous étudions plusieurs exemples dans la base $A=(j+2)_{j\geqslant 0}$, dite factorielle. En particulier, si s_A désigne la fonction somme de chiffres dans cette base et p parcourt la suite des nombres premiers, nous montrons que la suite $(s_A(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques, et que la suite $(\alpha s_A(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est équirépartie modulo 1 pour tout nombre irrationnel α.

Abstract Let $A=(a_n)_{n\geqslant 0}$ be a sequence of integers greater than or equal to 2, let $q_0=1$ and for all $n\geqslant 0$, $q_{n+1}=a_nq_n$. Every positive integer n has a unique expansion in the base A, called Cantor base, given by

$$m=\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon_j(m)q_j \quad \text{with} \quad 0\leqslant \varepsilon_j(m)<a_j=\frac{q_{j+1}}{q_j}.$$

In this paper we evaluate the sum

$$S=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n),$$

where Λ stands for the von Mangoldt function and f for a strongly multiplicative function in base A. Estimating associated sums of type I and II requires good control on discrete Fourier transforms built from f by shifting the representation in base A. This approach may fail if the sequence (a_n) is too irregular. Therefore we introduce the notion of *tempered* Cantor base and obtain in this setting a general bound on S.

We study several examples in the base $A=(j+2)_{j\geqslant 0}$, also called factorial number system. In particular, if s_A denotes the sum of digits function in this base and p runs along the prime numbers, we prove that the sequence $(s_A(p))_{p\in\mathcal{P}}$ is uniformly distributed in residue classes, and, for any irrational number α, that the sequence $(\alpha s_A(p))_{p\in\mathcal{P}}$ is uniformly distributed modulo 1.

Table des matières

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Notations

Dans cet article, $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ désigne l'ensemble des *entiers naturels*. La lettre p désigne systématiquement un nombre premier et $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers n'excédant pas x. Enfin, nous désignons par Λ la fonction de von Mangoldt définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\ell \text{ avec } p \text{ premier et } \ell \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

par τ la fonction qui compte le nombre de diviseurs, et par ω et Ω les fonctions qui comptent le nombre de facteurs premiers, respectivement, sans et avec multiplicité.

Nous désignons par $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ et $\{x\}$ respectivement la partie entière inférieure, supérieure et la partie fractionnaire de x. On note également $\|x\| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$; autrement dit, $\|x\|$ est la distance de x au nombre entier le plus proche. Nous employons la notation $\mathrm{e}(x) = e^{2i\pi x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous désignons par $\Re(z)$ la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$. Si f est une fonction à valeurs complexes et g une fonction à valeurs réelles strictement positives, la notation $f \ll g$ signifie que le rapport $|f|/g$ est borné. Si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles strictement positives, la notation $f \asymp g$ signifie que $f \ll g$ et $g \ll f$. La notation $\mathbb{U}$ désigne le cercle unité du plan complexe.

Afin de détecter les congruences, nous utiliserons la relation d'orthogonalité classique: pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}\left(\frac{j(a-b)}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv b \bmod m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

1. Introduction

1.1. Numération en base de Cantor

Soit $A = (a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers naturels tous au moins égaux à 2. On définit une *échelle de numération* $(q_n)_{n\geqslant 0}$ par $q_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $q_{n+1} = a_n q_n$, soit donc $q_n = a_{n-1}\cdots a_1 a_0$. La suite A est la *base* associée à cette échelle. Avec la convention

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

classique qu'un produit vide prend la valeur 1, cette formule vaut également pour $n = 0$. Alors, tout entier naturel m se représente selon cette échelle de manière unique par

$$m = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon_j(m) q_j \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \varepsilon_j(m) < a_j = \frac{q_{j+1}}{q_j}. \tag{2}$$

Exemple 1. Si $q \geqslant 2$ est un nombre entier, le choix $a_n = q$ pour tout $n \geqslant 0$ correspond à la base q usuelle que l'on qualifiera également de base constante.

Exemple 2. Lorsque $a_n = n+2$ pour tout $n \geqslant 0$, on a $q_n = (n+1)!$: c'est la base factorielle.

Ces systèmes de numération sont étudiés par exemple dans [12] and [20, §4.1].

1.2. Fonctions A-additives

D'après [6], la fonction somme des chiffres a été étudiée dès 1884 par T.C Simmons. Les notions plus générales de fonctions (fortement) additives et multiplicatives en base constante q – on parle alors de fonctions q-additives et q-multiplicatives – ont été introduites indépendamment par Bellman et Shapiro [2] et Gelfond [13].

Définition 1. Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est dite A-additive (resp. A-multiplicative) s'il existe une famille de fonctions $(\gamma_j)_{j \geqslant 0}$ telle que, pour tout j, γ_j est définie de $\{0, \dots, a_j - 1\}$ dans $\mathbb{C}$, $\gamma_j(0) = 0$ (resp. $\gamma_j(0) = 1$), et telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$f(n) = \sum_{j \geqslant 0} \gamma_j(\varepsilon_j(n)) \quad \Big(\text{resp. } f(n) = \prod_{j \geqslant 0} \gamma_j(\varepsilon_j(n))\Big).$$

Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est dite fortement A-additive (resp. fortement A-multiplicative) s'il existe une fonction $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = 0$ (resp. $\gamma(0) = 1$) et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$f(n) = \sum_{j \geqslant 0} \gamma(\varepsilon_j(n)) \quad \Big(\text{resp. } f(n) = \prod_{j \geqslant 0} \gamma(\varepsilon_j(n))\Big).$$

Notons qu'il est nécessaire, dans le cas d'une fonction f fortement A-additive, de distinguer la fonction γ de la fonction f dans la définition 1 (voir par exemple Hofer *et al.* [15, remark 1]).

Par ailleurs, il est important de remarquer que si f est A-additive, alors

$$f(kq_\mu + m) = f(kq_\mu) + f(m)$$

pour tout $(\mu, k) \in \mathbb{N}^2$ et tout $m < q_\mu$. Si la fonction f est fortement A-additive, on n'a pas nécessairement

$$f(kq_\mu + m) = f(k) + f(m)$$

sous les mêmes hypothèses, ce qui serait le cas en base constante q. En revanche, on a bien

$$f(uq_\lambda + v) = f(u) + f(v) \tag{3}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant u < a_\lambda$ et $0 \leqslant v < q_\lambda$.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Exemple 3. Pour le choix $\gamma_j(k)=\gamma(k)=k$, on obtient la fonction *somme des chiffres* s_A en base A, qui est fortement A-additive. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\mapsto \mathrm{e}(\alpha s_A(n))$ est fortement A-multiplicative.

Les notions de fonctions A-additives et A-multiplicatives s'étendent aux systèmes de numération plus généraux où la suite $(q_n)_{n\geqslant 0}$ est remplacée par une suite d'entiers strictement croissante $(G_n)_{n\geqslant 0}$ satisfaisant $G_0=1$, la condition 2 étant alors automatiquement satisfaite. On parle alors de fonctions *G-additives*, resp. *G-multiplicatives* (voir par exemple [22, §7.3] ou [7, §8.4.2]).

Les propriétés asymptotiques de la fonction somme des chiffres et, plus généralement, des fonctions q-additives ont été largement étudiées. On pourra notamment consulter l'article de survol [7]. Plusieurs de ces propriétés ont été étendues aux fonctions A-additives (ou fortement A-additives), voire aux fonctions G-additives. Ont été notamment abordées (nous ne citons ici que des travaux dont les résultats incluent, voire traitent directement le cas des fonctions A-additives) :

— la détermination d'une formule exacte pour la valeur moyenne des N premières valeurs d'une fonction A-additive f ([19]) dans l'esprit du résultat de Delange [5] pour la somme des chiffres en base q;

— l'existence d'une loi de répartition limite pour f ou une version normalisée de f; cela comprend des analogues des théorèmes d'Erdős-Wintner et d'Erdős-Kac ([3, 23, 1, 10]);

— la répartitition de f dans les progressions arithmétiques ([16]);

— la répartition modulo 1 de f et d'éventuelles estimations de discrépance ([17, 15]).

Comme en témoignent ces différents travaux, le comportement des fonctions A-additives est généralement semblable à celui des fonctions q-additives lorsque la suite A est bornée. Dans le cas contraire, une condition sur la suite A, typiquement une croissance modérée, est habituellement requise pour faire aboutir les méthodes connues. Ce sera également le cas dans cet article.

Décrivons un peu plus précisément les travaux de Hoit sur les fonctions A-additives, dont l'esprit est proche de ce que nous proposons dans le présent article, l'un de nos objectifs étant d'établir des résultats semblables pour les fonctions fortement A-additives le long de la suite des nombres premiers (sous réserve, rappelons-le, que la suite A soit suffisamment régulière).

On dit qu'une fonction A-additive f admet une répartition limite uniforme modulo $m\geqslant 2$ si

$$\text{pour tout } k\in\{0,\dots,m-1\},\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\big\{0\leqslant n<N\,:\,f(n)\equiv k \bmod m\big\}=\frac{1}{m}. \qquad (4)$$

Hoit [16] donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions γ_j (cf. définition 1) pour que ce soit le cas lorsque m est un nombre premier. Il découle du théorème principal de [16] que la fonction somme des chiffres s_A est bien répartie dans les progressions arithmétiques modulo m dès que m est premier. Ce résultat subsiste en fait pour tout nombre entier $m\geqslant 2$. À toutes fins utiles, nous en donnons une preuve en section 12. Entre autres exemples, Hoit étudie également la somme des chiffres d'un

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

nombre entier où seuls certains chiffres, indexés par un sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$, sont pris en compte.

Dans un autre article ([17]), Hoit démontre que, dans toute base de Cantor A, la suite $(\alpha s_A(n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 pour tout nombre irrationnel α. Lorsque la suite $A=(a_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la condition $\sum_{n\geqslant 0} 1/a_n=\infty$, Hoit fournit une condition suffisante sur une fonction A-additive f pour que la suite $(\alpha f(n))_{n\geqslant 1}$ soit équirépartie modulo 1 pour tout nombre irrationnel α.

1.3. Problème abordé

Notons s_q la fonction somme de chiffres en base constante q. Mauduit et Rivat [27] sont parvenus en 2010 à obtenir une borne non triviale de la somme d'exponentielles

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\,\mathrm{e}(\alpha s_q(n)) \quad (\alpha\in\mathbb{R}, x\geqslant 1),$$

résolvant ainsi une conjecture due à Gelfond [13]. Dans [28], ils étudient plus généralement la somme

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n) \tag{5}$$

lorsque f est à valeurs dans le cercle unité si

1. f vérifie de bonnes propriétés de propagation de retenues en base constante q (cf. [28, definition 1]). Cela inclut la classe des fonctions fortement multiplicatives en base q.
2. la transformée de Fourier discrète d'une fonction associée à f est relativement « petite » (cf. [28, definition 2].

Cette méthode repose sur l'estimation des sommes de type I et II associées. Nous adoptons la même démarche en base de Cantor. Mais, dans cette situation, les calculs nécessitent une majoration de transformées de Fourier discrètes de fonctions construites à partir de *f par décalage* dans la numération en base A, et cette méthode peut s'avérer infructueuse si la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est trop irrégulière. À cet égard, nous introduisons plus bas la notion de *base tempérée*. De plus, nous nous limitons dans cet article aux fonctions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{U}$ fortement A-multiplicatives, cela afin de privilégier l'étude des problèmes posés par la base de Cantor pour ce type de questions. Dans ce cadre, nous obtenons une majoration générale de la somme (5). En guise d'application, nous étudions en base factorielle la répartition dans les progressions arithmétiques ou l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions fortement A-additives, notamment la fonction somme de chiffres s_A. Nous étudions également le cas où la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et présentons certains exemples « dégénérés ».

Afin d'exposer ces résultats (cf. section 4), il nous faut au préalable introduire la notion de base tempérée et la famille des transformées de Fourier discrètes qui interviennent dans ce problème (sections 2 et 3 respectivement).

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

2. Numération de Cantor décalée

Il est habituel, dans les problèmes liés à la numération, de se restreindre à des fenêtres digitales, plus précisément à des plages d'entiers dont seuls les chiffres correspondant à certains intervalles varient, les autres étant fixés. En base constante, pour $a < q^r$ et $b \in \mathbb{N}$, les entiers de la forme $n = a + kq^r + bq^{r+s}$ avec $k < q^s$ sont ceux dont l'écriture en base q commence par a (en partant des chiffres les moins significatifs), puis admet s chiffres quelconques et se poursuit par b. En base de Cantor, on dispose d'une écriture arithmétique similaire, $n = a + kq_r + bq_{r+s}$ avec $a < q_r$ et $b \in \mathbb{N}$ grâce à la structure multiplicative (ce n'est plus le cas avec des échelles de numération du type de celle de Zeckendorf étudiée par Drmota *et al.* [9]), mais, contrairement à ce qui se passe en base constante, le développement de Cantor de k ne se fait pas dans la même base que n, mais dans une base décalée, que nous introduisons ci-dessous.

2.1. Systèmes décalés

L'opérateur de décalage T agit sur les suites $A = (a_n)_{n\geqslant 0}$ par $TA = (a_{n+1})_{n\geqslant 0}$. Si $k \geqslant 1$ est un nombre entier, T^k désigne la k-ième itérée de T et l'on convient que $T^0A = A$. La base de Cantor T^kA est donc définie par

$$a_j^{[k]} = a_{j+k} \quad (j \geqslant 0),$$

ce qui donne pour échelle de numération

$$q_0^{[k]} = 1, \quad q_j^{[k]} = a_k \cdots a_{k+j-1} \quad (j \geqslant 1).$$

Ainsi, pour i, j et k entiers naturels,

$$q_k\, q_j^{[k]} = q_{k+j} \quad \text{et, plus généralement,} \quad q_k^{[i]}\, q_j^{[i+k]} = q_{j+k}^{[i]}. \tag{6}$$

On désigne par $(\varepsilon_j^{[k]}(n))_{j\geqslant 0}$ les chiffres d'un entier $n \geqslant 0$ dans la base T^kA, de sorte que

$$n = \sum_{j\geqslant 0} \varepsilon_j^{[k]}(n) q_j^{[k]}.$$

Observons également que pour $j,k \geqslant 0$,

$$\varepsilon_{j+k}(q_k n) = \varepsilon_j^{[k]}(n).$$

Pour toute fonction A-multiplicative f et $k \geqslant 0$, nous introduisons la fonction T^kA-multiplicative

$$f^{[k]} = \prod_{j\geqslant 0} \gamma_{j+k} \circ \varepsilon_j^{[k]}$$

ainsi que ses versions tronquées $f_{\mu,\lambda}^{[k]} = \prod_{\mu\leqslant j<\lambda} \gamma_{j+k} \circ \varepsilon_j^{[k]}$ qui sont $q_\lambda^{[k]}$-périodiques. On pose également $f_\lambda^{[k]} = f_{0,\lambda}^{[k]}$. Nous avons une relation simple, mais importante, entre f et ses décalées $f^{[k]}$: pour tous nombres entiers k et v,

$$f^{[k]}(v) = f(q_k v).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

On a également, pour tous nombres entiers μ, λ, v tels que $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$,

$$f_{\mu,\lambda}(q_\mu v) = f^{[\mu]}_{\lambda-\mu}(v). \tag{7}$$

2.2. Valuation relativement à l'échelle de numération et ses décalées

Soit une échelle de numération de Cantor $(q_n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout nombre réel $x \geqslant 1$ et tout entier naturel k, on note $v^{[k]}(x)$ le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture des entiers inférieurs ou égaux à x selon l'échelle décalée $(q^{[k]}_n)_{n\geqslant 0}$. Formellement, $v^{[k]}(x)$ est l'unique entier naturel non nul tel que

$$q^{[k]}_{v^{[k]}(x)-1} \leqslant x < q^{[k]}_{v^{[k]}(x)}.$$

En particulier, pour $k = 0$, $v(x) = v^{[0]}(x)$ est défini par l'encadrement $q_{v(x)-1} \leqslant x < q_{v(x)}$. Il est immédiat qu'à k fixé, la fonction $x \mapsto v^{[k]}(x)$ est croissante. Par ailleurs, comme $q_\lambda \geqslant 2^\lambda$, on a toujours

$$v(x) \leqslant 1 + \frac{\log x}{\log 2}. \tag{8}$$

Exemple 4.

(1) En base constante q, $v(x) = v^{[k]}(x) = \lfloor \log x / \log q \rfloor + 1$ ne dépend pas de k.

(2) Lorsque la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, on a $v(x) \asymp \log x$.

(3) En base factorielle, on a $v(x)! \leqslant x < (v(x)+1)v(x)!$, d'où, par la formule de Stirling,

$$\log x = v(x)\log(v(x)) - v(x) + O\big(\log(v(x))\big). \tag{9}$$

On en déduit que $v(x) \sim \log x / \log\log x$ quand x tend vers $+\infty$. En reportant l'expression $v(x) = (1+\xi(x))\log x/\log\log x$ dans (9) et en multipliant par $\log\log x/\log x$, il vient

$$\log\log x = \big(1+\xi(x)\big)\big[\log\log x - \log\log\log x - 1 + \log(1+\xi(x))\big] + O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log x}\right),$$

d'où $\xi(x) \sim \log\log\log x/\log\log x$. En reportant $\xi(x) = (1+\varrho(x))\log\log\log x/\log\log x$ dans l'équation ci-dessus et en multipliant par $\log\log x$, on obtient

$$\log\log\log x = -1 + \frac{\log\log\log x}{\log\log x}(1+\varrho(x))\big[\log\log x - \log\log\log x\big] + o(1),$$

d'où $\varrho(x) \sim \frac{1}{\log\log\log x}$ et, quand x tend vers $+\infty$,

$$v(x) = \frac{\log x}{\log\log x} + \frac{\log x \log\log\log x}{(\log\log x)^2} + \frac{\log x}{(\log\log x)^2} + o\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\right). \tag{10}$$

Ce développement asymptotique sera utile à la section 12.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

2.3. Bases tempérées

Nous introduisons dans ce paragraphe la notion de base tempérée. Nous établissons plusieurs propriétés d'une telle base dont certaines seront utiles dans la suite. Nous donnons également quelques exemples et contre-exemples pour étayer cette notion.

Définition 2. On dit que l'échelle $(q_n)_{n\geqslant 0}$ associée à A est *tempérée* si, pour tout couple $(B,d)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+$, il existe $0<\kappa=\kappa(B,d)<1$ tel que pour tout $(\mu,\rho,k_1,k_2)\in\mathbb{N}^4$ vérifiant $\rho\leqslant\kappa\mu$ et $\max(k_1,k_2)\leqslant d\mu$, on a

$$\left(q_\rho^{[k_1]}\right)^B \ll_{d,B} q_\mu^{[k_2]}, \tag{11}$$

c'est-à-dire

$$\left(a_{k_1}a_{k_1+1}\cdots a_{k_1+\rho-1}\right)^B \ll_{d,B} a_{k_2}a_{k_2+1}\cdots a_{k_2+\mu-1}.$$

Derrière cette définition passablement technique se cache l'idée que, dans une base tempérée, un produit $\prod_{i\in I}a_i$ où I est un intervalle « long » ne peut pas être dominé par une puissance d'un produit $\prod_{j\in J}a_j$ où J est un intervalle « court » si $\min(I\cup J)\ll|I|$. Par exemple, en appliquant cette définition avec $B=1$, $d=2$, $\mu\geqslant 1$, $\rho=1$, $k_1=\mu+1$, $k_2=0$, on constate que, dans une base tempérée, il n'existe pas de suite d'entiers $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\lim\mu_n=+\infty$ et $a_0\ldots a_{\mu_n-1}=o(a_{\mu_n})$ lorsque $n\to\infty$. La proposition 1 *infra* développe cette idée.

Exemple 5.

1. Toute échelle à base bornée et, *a fortiori*, toute base constante, est tempérée. Notons en effet $e_1=\min_{n\in\mathbb{N}}a_n\geqslant 2$ et $e_2=\max_{n\in\mathbb{N}}a_n$. Alors,
$$\left(q_\rho^{[k_1]}\right)^B\leqslant e_2^{\rho B}=e_1^{\rho B\log e_2/\log e_1}$$
et l'on peut donc prendre $\kappa=\log e_1/(B\log e_2)$.
2. L'échelle factorielle est tempérée. De fait, on a alors $q_\nu^{[k]}=\frac{(\nu+k+1)!}{(k+1)!}$ et l'on note que ce quotient est fonction croissante de k et de ν. De la formule $\log n!=n\log n+O(n)$, on tire alors, pour $\rho\leqslant\kappa\mu$ et $\max(k_1,k_2)\leqslant d\mu$,
$$\begin{aligned}\log\frac{\left(q_\rho^{[k_1]}\right)^B}{q_\mu^{[k_2]}}&=\log\left(\frac{(\rho+k_1+1)!^B\,(k_2+1)!}{(\mu+k_2+1)!\,(k_1+1)!^B}\right)\leqslant\log\left(\frac{\lceil(\kappa+d)\mu+1\rceil!^B}{(\mu+1)!\,\lceil d\mu+1\rceil!^B}\right)\\&=\big(\kappa B-1\big)\mu\log\mu+O(\mu)\end{aligned}$$
et l'on peut donc prendre $\kappa<1/B$.
3. Le calcul ci-dessus s'étend immédiatement de $a_n=n+2$ (échelle factorielle) à $a_n=(n+2)^k$ et $k\in\mathbb{N}^*$. De manière similaire, pour $a_n=(n+2)^{n+2}$, on obtient
$$\log\frac{\left(q_\rho^{[k_1]}\right)^B}{q_\mu^{[k_2]}}=[B(2d\kappa+\kappa^2)-1]\mu^2\log\mu+O(\mu^2),$$
ce qui permet de choisir κ et montre que l'on obtient une échelle tempérée.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

La condition de tempérance empêche à la fois une croissance trop rapide de la base et de trop grandes irrégularités locales. C'est ce que montrent la proposition 1 et les contre-exemples ci-dessous.

Proposition 1. *Soit $(q_n)_{n\geqslant 0}$ une échelle tempérée de base $A=(a_n)_{n\geqslant 0}$. Alors,*

(1) *il existe $\alpha\geqslant 1$ tel que $\log q_n \ll n^\alpha$;*

(2) $a_n = o(q_n^\beta)$ *pour tout $\beta>0$.*

Démonstration.

(1) Comme $\prod_{j<n} a_j \geqslant 2^n$, l'exposant α, s'il existe, est nécessairement au moins égal à 1. Posons $\kappa=\kappa(1,1)$. On définit une suite $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation de récurrence $\mu_{n+1}=\mu_n+\lfloor\kappa\mu_n\rfloor$, la valeur de μ_0 étant fixée ultérieurement. Par définition d'une échelle tempérée, il existe une constante M telle que $q_{\lfloor\kappa\mu_n\rfloor}^{[\mu_n]}\leqslant Mq_{\mu_n}$ pour tout entier n. Il s'ensuit
$$q_{\mu_{n+1}} = q_{\mu_n} q_{\lfloor\kappa\mu_n\rfloor}^{[\mu_n]} \leqslant M\left(q_{\mu_n}\right)^2, \text{ d'où } q_{\mu_n}\leqslant \frac{1}{M}\left(Mq_{\mu_0}\right)^{2^n}.$$
La relation définissant μ_n donne de son côté
$$\mu_{n+1}\geqslant(1+\kappa)\mu_n-1, \text{ d'où } \mu_n\geqslant(1+\kappa)^n\mu_0-\frac{(1+\kappa)^n-1}{\kappa}\geqslant\left(\mu_0-\frac{1}{\kappa}\right)(1+\kappa)^n.$$
On choisit maintenant $\mu_0>1/\kappa$. Alors,
$$\log q_{\mu_n}\ll 2^n \ll \mu_n^{\log 2/\log(1+\kappa)}, \text{ d'où } \log q_n \ll n^{\log 2/\log(1+\kappa)},$$
la croissance de $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ étant d'ordre géométrique.

(2) Soit $\beta>0$. La définition d'une échelle tempérée appliquée avec $B=1/\beta$ et $d=1$ donne
$$a_n = q_1^{[n]} \ll q_n^\beta. \qquad \square$$

Remarque 1. La première assertion de la proposition 1 est équivalente à $v(x)\gg(\log x)^{1/\alpha}$. Par ailleurs, rappelons que (8) donne inversement $v(x)\ll\log x$.

Exemple 6. Soit $A=(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0=a_1=a_2=2$, puis, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_k=k$ si $2^{2n-1}+1\leqslant k\leqslant 2^{2n}$ et $a_k=2$ si $2^{2n}+1\leqslant k\leqslant 2^{2n+1}$. Pour $\mu=k_1=2^{2n-1}+1$, $k_2=2^{2n}+1$, $\rho=\lfloor\kappa\mu\rfloor$ et $0<\kappa<1$, il vient
$$\log q_\rho^{[k_1]} = \log\left((\mu+\lfloor\kappa\mu\rfloor-1)!\right)-\log\left((\mu-1)!\right)\sim(\kappa\log 2)n2^{2n} \qquad \text{et} \qquad \log q_\mu^{[k_2]}=(\log 2)2^{2n-1},$$
ce qui montre que l'échelle associée n'est pas tempérée. Comme on a $\log q_n = O(n\log n)$, cet exemple montre aussi sans surprise que les propriétés données dans la proposition 1 ne sont pas des conditions suffisantes de tempérance.

Exemple 7. L'exemple 6 montre que la condition de croissance $a_n=O(n)$ n'entraîne pas que A est tempérée. On pourrait penser qu'ajouter une condition de croissance permettrait d'assurer le caractère tempéré; ce n'est pas le cas comme le montre l'adaptation suivante du contre-exemple précédent.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Soit une suite d'entiers $(r_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante avec $r_1 = 2$ telle que $r_{k+1} > 2r_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La suite $(a_n)_n$ est alors construite comme suit:

$$a_0 = a_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} a_n = n & \text{si } r_k \leqslant n < 2r_k, \\ a_n = 2r_k - 1 & \text{si } 2r_k \leqslant n < r_{k+1}. \end{cases}$$

La suite $(a_n)_n$ est bien croissante. Soit $0 < \kappa < 1$. De même que dans l'exemple 6,

$$\log q^{[r_k]}_{\lfloor \kappa r_k \rfloor} \sim \kappa r_k \log(r_k) \quad \text{ et } \quad \log q_{r_k} \leqslant r_k \log(2r_{k-1} - 1).$$

Pour garantir que l'échelle associée à A n'est pas tempérée, il suffit de prendre r_k tel que $\log(r_k)/\log(r_{k-1})$ tende vers l'infini, par exemple si $r_k = r_{k-1}^k$ pour $k \geqslant 3$.

2.4. Valuations dans une base tempérée

La proposition suivante s'intéresse aux ordres de grandeur des valuations décalées de x et de x^β. Nous l'utiliserons essentiellement dans le cas non décalé.

Proposition 2. *Soit A une base tempérée.*

(1) *Soit $\beta, \delta > 0$. Pour tout $x \geqslant 1$, et tout $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\mu \leqslant \delta v(x)$, on a*
$$v^{[\mu]}(x^\beta) \asymp_{\delta,\beta} v(x).$$

(2) *Soit $0 < \beta < 1$. Il existe $c < 1$ et $x_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$,*
$$v(x^\beta) \leqslant cv(x). \tag{12}$$

Démonstration. (1) Posons $\kappa_1 = \kappa(\beta, \delta)$. Par hypothèse,

$$\mu \leqslant \delta v(x) \leqslant \delta \left\lceil \frac{v(x)}{\kappa_1} \right\rceil.$$

De $x < q_{v(x)}$ et de la définition d'une base tempérée en prenant $k_1 = 0$ et $k_2 = \mu$, on déduit l'existence d'une constante $\xi > 1$ telle que

$$x^\beta < (q_{v(x)})^\beta \leqslant \xi\, q^{[\mu]}_{\lceil v(x)/\kappa_1 \rceil} = 2^{\log_2 \xi}\, q^{[\mu]}_{\lceil v(x)/\kappa_1 \rceil} \leqslant q^{[\mu]}_{\lceil v(x)/\kappa_1 \rceil + \lceil \log_2 \xi \rceil},$$

d'où $v^{[\mu]}(x^\beta) \leqslant v(x)/\kappa_1 + \log_2 \xi + 2 \ll_\beta v(x)$. Pour la minoration, notons tout d'abord que, si m est un entier, $m \geqslant 4$, et $0 < t < 1$, alors

$$t \left\lfloor \frac{m-1}{t} \right\rfloor \geqslant t\left(\frac{m-1}{t} - 1\right) \geqslant m - 2 \geqslant \frac{m}{2}. \tag{13}$$

Prenons $\kappa_2 = \kappa(1/\beta, 0)$ et $\kappa_3 = \kappa(1, 2\delta/\kappa_2)$. Alors, (13) donne

$$\mu \leqslant \delta v(x) \leqslant \frac{2\delta}{\kappa_2} \lfloor \kappa_2 (v(x) - 1) \rfloor.$$

On applique alors deux fois la définition d'une base tempérée. Il vient

$$q^{[\mu]}_{\lfloor \kappa_2 \kappa_3 (v(x)-1) \rfloor} \ll q_{\lfloor \kappa_2 (v(x)-1) \rfloor} \ll \left(q_{v(x)-1}\right)^\beta \leqslant x^\beta,$$

d'où $v^{[\mu]}(x^\beta) \gg v(x)$.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

(2) Soit $x\in\mathbb{N}^*$. Posons $\lambda=v(x^\beta)$. Alors,

$$q_{v(x)}\geqslant x^\beta\times x^{1-\beta}\geqslant q_{\lambda-1}\times(q_{v(x)-1})^{1-\beta}. \tag{14}$$

D'après le *(1)*, il existe une constante d telle que $\lambda-1\leqslant d(v(x)-1)$. Il est donc loisible d'appliquer la définition d'une base tempérée avec $k_1=\lambda-1$, $\mu=v(x)-1$, $k_2=0$, d la valeur ci-dessus et $B=1/(1-\beta)$. Il existe donc $\xi>1$ tel que, pour $\kappa_0=\kappa\big(1/(1-\beta),d\big)$,

$$(q^{[\lambda-1]}_{\lfloor\kappa_0(\lambda-1)\rfloor})^{1/(1-\beta)}\leqslant\xi\, q_{v(x)-1},\quad\text{d'où}\quad(q_{v(x)-1})^{1-\beta}\geqslant\xi^{\beta-1}q^{[\lambda-1]}_{\lfloor\kappa_0(\lambda-1)\rfloor}\geqslant q^{[\lambda-1]}_{\lfloor\kappa_0(\lambda-1)\rfloor+\lceil(\beta-1)\log_2(\xi)\rceil}. \tag{15}$$

Finalement, la synthèse de (14) et de (15) donne, avec (6),

$$q_{v(x)}\geqslant x\geqslant q_{\lambda-1}\times q^{[\lambda-1]}_{\lfloor\kappa_0(\lambda-1)\rfloor+\lceil(\beta-1)\log_2(\xi)\rceil}=q_{\lfloor\kappa_0(\lambda-1)\rfloor+\lceil(\beta-1)\log_2(\xi)\rceil+\lambda-1}.$$

Ainsi, $v(x)\geqslant\lfloor\kappa_0(\lambda-1)\rfloor+\lceil(\beta-1)\log_2(\xi)\rceil+\lambda-1\underset{x\to\infty}{\sim}(\kappa_0+1)\lambda$, d'où, pour tout $c>\frac{1}{\kappa_0+1}$, l'inégalité $v(x^\beta)\leqslant cv(x)$ à partir d'un certain rang. □

3. Transformées de Fourier discrètes

Soit $\lambda\in\mathbb{N}$, f une fonction A-multiplicative et α un nombre réel. La fonction $u\mapsto\mathrm{e}(\alpha f_\lambda(u))$ est q_λ-périodique et sa transformée de Fourier discrète est donnée pour $t\in\mathbb{R}$ par

$$F_\lambda(t)=\frac{1}{q_\lambda}\sum_{u<q_\lambda}f(u)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{tu}{q_\lambda}\Big). \tag{16}$$

Plus généralement, si $k\in\mathbb{N}$, la fonction $u\mapsto f^{[k]}_\lambda(u)$ est $q^{[k]}_\lambda$-périodique et sa transformée de Fourier est donnée par

$$F^{[k]}_\lambda(t)=\frac{1}{q^{[k]}_\lambda}\sum_{u<q^{[k]}_\lambda}f^{[k]}(u)\,\mathrm{e}\left(-\frac{tu}{q^{[k]}_\lambda}\right), \tag{17}$$

et nous convenons que $F^{[0]}_\lambda=F_\lambda$. La moyenne quadratique de cette transformée de Fourier est donnée par la formule de Parseval: pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\sum_{0\leqslant v<q^{[k]}_\lambda}\big|F^{[k]}_\lambda(v+t)\big|^2=1. \tag{18}$$

Nous pouvons utiliser la factorisation $f=\prod_{j\geqslant0}\gamma_j\circ\varepsilon_j$ (voir définition 1) pour exprimer $F^{[k]}_\lambda$ sous forme d'un produit. Nous introduisons pour $j\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$,

$$\theta_j(t)=\frac{1}{a_j}\sum_{0\leqslant u<a_j}\gamma_j(u)\,\mathrm{e}(-ut). \tag{19}$$

Lemme 1. On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, tout $\lambda\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}$,

$$F^{[k]}_\lambda(t)=F^{[k]}_{\lambda-1}\Big(\frac{t}{a_{\lambda+k-1}}\Big)\,\theta_{\lambda+k-1}\Big(\frac{t}{a_{\lambda+k-1}}\Big).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Partant de (21), on pose $u = vq_{\lambda-1}^{[k]} + r$ avec $0 \leqslant v < a_{\lambda+k-1}$ et $0 \leqslant r < q_{\lambda-1}^{[k]}$. On a alors

$$f^{[k]}(u) = f^{[k]}(vq_{\lambda-1}^{[k]} + r) = \gamma_{\lambda+k-1}(v) f^{[k]}(r)$$

et donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F_\lambda^{[k]}(t) = \Bigg(\frac{1}{q_{\lambda-1}^{[k]}} \sum_{0 \leqslant r < q_{\lambda-1}^{[k]}} f^{[k]}(r)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{tr}{a_{\lambda+k-1}q_{\lambda-1}^{[k]}}\Big)\Bigg)\Bigg(\frac{1}{a_{\lambda+k-1}} \sum_{0 \leqslant v < a_{\lambda+k-1}} \gamma_{\lambda+k-1}(v)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{t}{a_{\lambda+k-1}}\Big)\Bigg).$$

□

En itérant, on obtient une représentation en forme de produit, typique pour les transformées de Fourier de fonctions additives dans un système de numération.

Lemme 2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$F_\lambda^{[k]}(t) = \prod_{j=0}^{\lambda-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-j}^{[j+k]}}\right). \tag{20}$$

Démonstration. Fixons k et montrons par récurrence sur λ que l'on a (25) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $q_0^{[k]} = 1$, on a $F_0^{[k]}(t) = 1$ et l'identité (25) est vérifiée pour $\lambda = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que (25) est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors, d'après le Lemme 2,

$$F_{\lambda+1}^{[k]}(t) = \theta_{\lambda+k}\Big(\frac{t}{a_{\lambda+k}}\Big) F_\lambda^{[k]}\Big(\frac{t}{a_{\lambda+k}}\Big) = \theta_{\lambda+k}\Big(\frac{t}{a_{\lambda+k}}\Big) \prod_{j=0}^{\lambda-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-j}^{[j+k]} a_{\lambda+k}}\right).$$

Or, $a_{\lambda+k} = q_1^{[\lambda+k]}$ et (6) donnent $q_{\lambda-j}^{[j+k]} a_{\lambda+k} = q_{\lambda-j}^{[j+k]} q_1^{[\lambda+k]} = q_{\lambda-j+1}^{[j+k]}$, d'où

$$F_{\lambda+1}^{[k]}(t) = \theta_{\lambda+k}\Big(\frac{t}{a_{\lambda+k}}\Big) \prod_{j=0}^{\lambda-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-j+1}^{[j+k]}}\right) = \prod_{j=0}^{\lambda} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-j+1}^{[j+k]}}\right).$$ □

On peut en déduire la décomposition suivante.

Lemme 3. Pour tout $(\mu,\lambda,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$, $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_\lambda^{[k]}(t) = F_\mu^{[k]}\left(\frac{t}{q_{\lambda-\mu}^{[\mu+k]}}\right) F_{\lambda-\mu}^{[k+\mu]}(t).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
F_\lambda^{[k]}(t) &= \prod_{j=0}^{\mu-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-j}^{[j+k]}}\right) \prod_{j=\mu}^{\lambda-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-j}^{[j+k]}}\right) \\
&= \prod_{j=0}^{\mu-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\mu-j}^{[j+k]}} \frac{q_{\mu-j}^{[j+k]}}{q_{\lambda-j}^{[j+k]}}\right) \prod_{j=0}^{\lambda-\mu-1} \theta_{k+\mu+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-\mu-j}^{[j+k+\mu]}}\right) \\
&= \prod_{j=0}^{\mu-1} \theta_{k+j}\left(\frac{t}{q_{\mu-j}^{[j+k]}} \frac{1}{q_{\lambda-\mu}^{[\mu+k]}}\right) \prod_{j=0}^{\lambda-\mu-1} \theta_{k+\mu+j}\left(\frac{t}{q_{\lambda-\mu-j}^{[j+k+\mu]}}\right).
\end{aligned}$$ □

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

4. Présentation des résultats

L'obtention d'un théorème des nombres premiers pour une fonction fortement A-multiplicative f à valeurs dans $\mathbb{U}$, soit une estimation du type

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n)=o(x)\quad (x\to+\infty),$$

repose dans ce travail sur une bonne majoration uniforme des transformées de Fourier $F_\lambda^{[k]}$ définie à la section 3. En pratique, pour les exemples étudiés, qui sont de la forme $f(n)=\mathrm{e}(\alpha g(n))$ avec $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ fortement A-additive et $\alpha\in\mathbb{R}$, nous obtenons des majorations du type

$$|F_\lambda^{[k]}(t)|\leqslant C\exp\Big(-\sum_{k\leqslant j<k+\lambda}t_j\,\|b_j\alpha\|^2\Big),$$

où $C>0$, $t_j>0$ et $b_j\in\mathbb{N}$. En vue d'énoncer un résultat général, nous introduisons une classe de fonctions fortement A-multiplicatives dont les transformées de Fourier décalées admettent une majoration de ce type. La définition suivante est directement inspirée de [28, definition 2].

Définition 3. Soit une fonction $\sigma:\ ]0,\infty[^2\to\mathbb{R}_+$ telle que:

$$\begin{cases} r\mapsto\sigma(r,\cdot)\ \text{est décroissante},\\ s\mapsto\sigma(\cdot,s)\ \text{est croissante}.\end{cases}\tag{21}$$

On désigne par $\mathcal{F}_\sigma$ la classe des fonctions fortement A-multiplicatives $f:\mathbb{N}\to\mathbb{U}$ telles que pour tout $t\in\mathbb{R}^2$, $(k,\lambda)\in\mathbb{N}^2$,

$$|F_\lambda^{[k]}(t)|\leqslant e^{-\sigma(k,k+\lambda)}.\tag{22}$$

Remarque 2. Si $f\in\mathcal{F}_\sigma$, alors d'après l'identité de Parseval (23),

$$1=\sum_{0\leqslant v<q_\lambda^{[k]}}|F_\lambda^{[k]}(v)|^2\leqslant e^{-2\sigma(k,k+\lambda)}q_\lambda^{[k]},$$

de sorte que

$$e^{-\sigma(k,k+\lambda)}\geqslant (q_\lambda^{[k]})^{-1/2}.\tag{23}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cet article. Nous rappelons que la définition de la valuation $v(x)$ a été donnée au paragraphe 2.2. Étant donnés une fonction σ satisfaisant à (21), des réels $x\geqslant 1$ et $c>0$, nous posons

$$\mathcal{K}_\sigma(x,c):=\inf_{v(x^{3/10})\leqslant\lambda\leqslant v(x)}\sigma(c\lambda,\lambda-1).\tag{24}$$

Théorème 1. Soit $(q_n)_{n\geqslant 0}$ une échelle de numération tempérée, σ une fonction satisfaisant à (21) et $f\in\mathcal{F}_\sigma$. Il existe des nombres réels $0\leqslant c_0<1$ et $x_0\geqslant 2$ tels que, pour tout $x\geqslant x_0$,

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n)\ll x(\log x)^{9/2}\max\left(\tau(q_{v(x)}),\log x\right)^{1/4}e^{-\mathcal{K}_\sigma(x,c_0)/2}+x^{9/10}\log x. \tag{25}$$

Les constantes c_0, x_0 et la constante implicite ne dépendent que de la suite $(q_n)_{n\geqslant 0}$.

Une condition nécessaire pour que la majoration (25) soit non triviale est

$$\lim_{x\to+\infty}\mathcal{K}_\sigma(x,c_0)=+\infty.$$

compte tenu de (22) et (21), cette condition entraîne

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left\|F^{[\lfloor c_0\lambda\rfloor]}_{\lfloor(1-c_0)\lambda\rfloor}\right\|_\infty=0. \tag{26}$$

Notons par ailleurs que d'après la proposition 2, il existe $c_1\in]0,1[$ tel que pour tout x suffisamment grand, $v(x^{3/10})\geqslant c_1v(x)$, ce qui entraîne

$$\mathcal{K}_\sigma(x,c_0)\geqslant\inf_{c_1v(x)\leqslant\lambda\leqslant v(x)}\sigma(c_0\lambda,\lambda-1). \tag{27}$$

La démonstration du théorème 1 repose sur l'estimation de sommes de type I et II. Dans les sections 6 et 7, nous adaptons au cas de la base de Cantor les démonstrations des propositions 1 et 2 de [28]. La notion de base tempérée intervient lors de l'estimation des sommes de type II, dont le traitement fait rapidement apparaître des phénomènes de décalage dans la numération.

Dans le cas où $f(n)=\mathrm{e}(\alpha s_A(n))$, la fonction θ_j définie par (24) prend une forme familière: pour tout $j\geqslant 0$,

$$|\theta_j(t)|=\frac{\varphi_{a_j}(\alpha-t)}{a_j},$$

où la fonction φ_k est définie par

$$\varphi_k(t)=\left|\sum_{0\leqslant v<k}\mathrm{e}(vt)\right|=\begin{cases}|\sin\pi kt|/|\sin\pi t| & \text{si } t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\\ k & \text{si } t\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{28}$$

Des calculs proches de ceux effectués dans [27] et [26] permettent de montrer (cf. proposition 5) que quels que soient la base $A=(a_j)_{j\geqslant 0}$ choisie et $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $\mathrm{e}(\alpha s_A(n))$ appartient à $\mathcal{F}_\sigma$ avec

$$\sigma(r,s)=\frac{\pi^2}{36}\sum_{r\leqslant j<s}\|(a_j-1)\alpha\|^2.$$

Nous en déduisons un théorème des nombres premiers pour la fonction s_A dans la base factorielle $A=(j+2)_{j\geqslant 0}$. Rappelons qu'en ce cas, la valuation d'un nombre réel positif x vérifie la relation $v(x)\sim\log x/\log\log x$ lorsque $x\to\infty$ (exemple 4).

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Théorème 2. En base factorielle, il existe des nombres réels $0 \leqslant c_3 < 1$ et $d_3 > 0$ tels que pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 3$,

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \,\mathrm{e}\big(\alpha s_A(n)\big) \ll x \exp\Big(d_3 \frac{\log x}{(\log\log x)^2} - \frac{\pi^2}{72} \inf_{v(x^{3/10}) \leqslant \lambda \leqslant v(x)} \sum_{c_3\lambda+1 \leqslant j < \lambda} \|j\alpha\|^2\Big).$$

Nous établissons alors deux applications, standard en la circonstance.

Théorème 3. En base factorielle, il existe $c_4 > 0$ tel que pour tout nombre entier $b \geqslant 2$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $x \geqslant 3$, on a

$$\operatorname{card}\{p \leqslant x : s_A(p) \equiv \ell \bmod b\} = \frac{\pi(x)}{b} + O\left(x \exp\Big(-c_4 \frac{\log x}{\log\log x}\Big)\right).$$

La constante implicite dépend de b.

Théorème 4. En base factorielle, pour tout nombre irrationnel α, la suite $(\alpha s_A(p))_{p \in \mathcal{P}}$ est équirépartie modulo 1.

Dans la section 10, nous étudions d'autres exemples de fonctions fortement additives en base factorielle. En particulier, la fonction, disons g, qui compte le nombre d'apparitions du chiffre 1 en base factorielle constitue un exemple « négatif » intéressant. Rappelons au préalable que la fonction qui compte le nombre d'apparitions du chiffre 1 en base constante q satisfait un théorème des nombres premiers (cf. [25]). Nous obtenons dans le paragraphe 10.3 une estimation de la transformée de Fourier F_λ associée à $f(n) = \mathrm{e}\big(\alpha g(n)\big)$, qui permet d'établir en base factorielle pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ l'estimation

$$\sum_{n \leqslant x} \mathrm{e}\big(\alpha g(n)\big) = o(x) \quad (x \to \infty).$$

En particulier, cette estimation permet de montrer, grâce à la relation (1), que g est bien répartie dans les progressions arithmétiques modulo m pour tout entier $m \geqslant 2$. Hoit [16, example (a) p. 198] avait traité le cas où m est premier. En revanche, les transformées de Fourier décalées $F_\lambda^{[k]}$ ne tendent pas uniformément vers 0 lorsque $\lambda \to +\infty$ et $k = \lfloor c\lambda \rfloor$ avec $c > 0$ fixé. Autrement dit, la condition (26) n'est satisfaite pour aucune valeur de c_0. Ainsi, notre méthode ne permet pas d'obtenir pour cette fonction g la relation

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \,\mathrm{e}\big(\alpha g(n)\big) = o(x) \quad (x \to \infty).$$

Il semble *a fortiori* exclu de pouvoir démontrer, avec la méthode développée dans cet article, un théorème des nombres premiers pour la fonction comptant le nombre d'apparitions du bloc 11 en base factorielle, à l'instar de ce qui a été obtenu dans [28] en base 2.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

5. Lemmes techniques sur les sommes d'exponentielles

Pour la commodité du lecteur, nous redonnons ici quelques lemmes énoncés dans [28] ainsi qu'un lemme adapté à l'estimation de la moyenne d'une fonction A-multiplicative.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on désigne par χ_α la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\alpha[$ modulo 1.

Lemme 4. Pour tout $\alpha \in [0,1[$ et tout nombre entier $H \geqslant 1$, il existe des polynômes trigonométriques $A_{\alpha,H}$ et $B_{\alpha,H}$ à valeurs réelles tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\chi_\alpha(x) - A_{\alpha,H}(x)| \leqslant B_{\alpha,H}(x),$$

où

$$A_{\alpha,H}(x) = \sum_{|h|\leqslant H} a_h(\alpha,H)\,\mathrm{e}(hx), \qquad B_{\alpha,H}(x) = \sum_{|h|\leqslant H} b_h(\alpha,H)\,\mathrm{e}(hx)$$

avec des coefficients $a_h(\alpha,H)$ et $b_h(\alpha,H)$ satisfaisant à

$$a_0(\alpha,H) = \alpha, \quad |a_h(\alpha,H)| \leqslant \min\left(\alpha, \frac{1}{\pi|h|}\right), \quad |b_h(\alpha,H)| \leqslant \frac{1}{H+1}.$$

Lemme 5. Pour tout $(\alpha_1,\alpha_2) \in [0,1[^2$, tous entiers $H_1,H_2 \geqslant 1$ et tout $(x,y)^2$, on a

$$\begin{aligned}&|\chi_{\alpha_1}(x)\chi_{\alpha_2}(y) - A_{\alpha_1,H_1}(x)A_{\alpha_1,H_1}(y)|\\&\quad\leqslant \chi_{\alpha_1}(x)B_{\alpha_2,H_2}(y) + B_{\alpha_1,H_1}(x)\chi_{\alpha_2}(y) + B_{\alpha_1,H_1}(x)B_{\alpha_2,H_2}(y).\end{aligned}$$

Lemme 6. Pour tout $(z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{C}^N$ et tous entiers $k,R \geqslant 1$, on a

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant N} z_n\Big|^2 \leqslant \frac{N+kR-k}{R}\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|z_n|^2 + 2\sum_{1\leqslant r<R}\left(1-\frac{r}{R}\right)\sum_{1\leqslant n\leqslant N-kr}\Re(z_{n+kr}\overline{z_n})\Big).$$

Lemme 7. Pour tout $(a,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \geqslant 1$, $b \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ tel que $U > 0$, on a

$$\sum_{0\leqslant n<m} \min\left(U, \left|\sin\pi\frac{an+b}{m}\right|^{-1}\right) \ll (a,m)U + m\log m.$$

Lemme 8. Pour tout $(A,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \geqslant 1$ et $A \geqslant 1$, $b \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathbb{R}$ avec $U > 0$, on a

$$\frac{1}{A}\sum_{1\leqslant a\leqslant A}\sum_{0\leqslant n<m} \min\left(U, \left|\sin\pi\frac{an+b}{m}\right|^{-1}\right) \ll \tau(m)U + m\log m.$$

Lemme 9. Pour tout $(z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{C}^N$ et tout nombre entier $Q \geqslant 1$ on a

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\Big|\sum_{n=1}^{N} z_n\,\mathrm{e}\left(\frac{an}{q}\right)\Big|^2 \leqslant (N-1+Q^2)\sum_{n=1}^{N}|z_n|^2.$$

Le dernier lemme de ce paragraphe généralise les formules (2.10) et (2.11) de [14].

Lemme 10. Soient une fonction A-multiplicative f, un entier $x = x_kq_k + \cdots + x_0q_0$ avec $x_j = \varepsilon_j(x) \in \{0,\dots,a_j-1\}$ pour $j \in \{0,\dots,k\}$, et $S(x) = \sum_{0\leqslant u<x} f(u)$. Pour $0 \leqslant \ell \leqslant k+1$, on pose $x^{(\ell)} = x_kq_k + \cdots + x_\ell q_\ell$ avec la convention $x^{(k+1)} = 0$. Alors,

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

$$S(x) = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} f(x^{(\ell+1)}) S(q_\ell) \sum_{0 \leqslant a < x_\ell} f(aq_\ell). \tag{29}$$

Si f est, de plus, à valeurs dans le disque unité, alors

$$|S(x)| \leqslant \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} x_\ell \, |S(q_\ell)|. \tag{30}$$

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \{0, \dots, a_j - 1\}$, on a

$$S(yq_j) = \sum_{0 \leqslant u < yq_j} f(u) = \sum_{0 \leqslant a < y} \sum_{0 \leqslant u < q_j} f(aq_j + u) = S(q_j) \sum_{0 \leqslant a < y} f(aq_j).$$

Le caractère multiplicatif de f donne $f(x^{(\ell)} + u) = f(x^{(\ell)}) f(u)$ pour $u < q_\ell$ et il vient

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{0 \leqslant u < x} f(u) = S(x_k q_k) + f(x_k q_k) S(x - x_k q_k) \\ &= S(x_k q_k) + f(x^{(k)}) S(x_{k-1} q_{k-1}) + f(x^{(k-1)}) S(x - x_k q_k - x_{k-1} q_{k-1}) \\ &= \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} f(x^{(\ell+1)}) S(x_\ell q_\ell) = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} f(x^{(\ell+1)}) S(q_\ell) \sum_{0 \leqslant \varepsilon < x_\ell} f(\varepsilon q_\ell). \end{aligned}$$

Si f prend ses valeurs dans le disque unité, alors l'inégalité triangulaire donne

$$|S(x)| \leqslant \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} \sum_{0 \leqslant \varepsilon < x_\ell} |S(q_\ell)| = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k} x_\ell \, |S(q_\ell)|.$$ □

6. Sommes de type I

Soient σ une fonction satisfaisant à (21) et $f \in \mathcal{F}_\sigma$. L'objet de cette section est d'obtenir une estimation pour les sommes de type I de la forme

$$S_I := \sum_{M/2 < m \leqslant M} \max_{t \leqslant x/m} \Big| \sum_{n < t} f(mn) \Big|.$$

Nous ne faisons pas ici l'hypothèse que la base A est tempérée. Rappelons par ailleurs que $v(y)$ désigne la valuation du nombre y en base A (cf. §2.2).

Proposition 3. *Pour des nombres réels $x \geqslant 2$, $M \geqslant 2$ vérifiant*

$$1 \leqslant v(M^2) \leqslant v(x) - 1,$$

on a

$$S_I \ll x (\log x)^2 e^{-\sigma(v(M^2), v(x) - 1)}. \tag{31}$$

Démonstration. Posons $\nu = v(M^2)$ et $\lambda = v(x)$, de sorte que $\nu \leqslant \lambda - 1$. Posons également $L = q_{\lambda - 1}$ et $L' = \left\lfloor \frac{mt}{L} \right\rfloor$. Comme f est A-multiplicative, pour $t \leqslant x/m$, on a

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}\sum_{n<t} f(mn) &= \sum_{0\leqslant \ell'\leqslant L'} \sum_{\substack{0\leqslant \ell<L\\ \ell+\ell' L<mt\\ \ell+\ell' L\equiv 0 \bmod m}} f(\ell+\ell' L) = \sum_{0\leqslant \ell'\leqslant L'} f(\ell' L) \sum_{\substack{0\leqslant \ell<\min(L,mt-\ell' L)\\ \ell+\ell' L\equiv 0 \bmod m}} f(\ell)\\
&= \sum_{0\leqslant \ell'\leqslant L'} f(\ell' L) \sum_{0\leqslant \ell<L} f(\ell) \sum_{0\leqslant u<\min(L,mt-\ell' L)} \frac{1}{L}\sum_{h<L} \mathrm{e}\Big(h\frac{u-\ell}{L}\Big)\frac{1}{m}\sum_{k<m}\mathrm{e}\Big(\frac{k(\ell+\ell' L)}{m}\Big)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{0\leqslant \ell'\leqslant L'}\sum_{h<L} f(\ell' L) \sum_{0\leqslant u<\min(L,mt-\ell' L)} \mathrm{e}\Big(\frac{hu}{L}\Big)\sum_{k<m}\mathrm{e}\Big(\frac{k\ell' L}{m}\Big)\frac{1}{L}\sum_{\ell<L} f(\ell)\,\mathrm{e}\Big(\frac{k\ell}{m}\Big)\mathrm{e}\Big(\frac{-h\ell}{L}\Big),\end{aligned}$$

d'où

$$\Big|\sum_{n<t} f(mn)\Big| \leqslant \frac{1}{m}\sum_{0\leqslant \ell'\leqslant L'}\sum_{h<L}\Bigg|\sum_{0\leqslant u<\min(L,mt-\ell' L)} \mathrm{e}\Big(\frac{hu}{L}\Big)\Bigg|\sum_{k<m}\Big|F_{\lambda-1}\Big(h-\frac{k}{m}q_{\lambda-1}\Big)\Big|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}S_I &\leqslant L'\sum_{h<L}\min\Big(L,\Big|\sin\frac{\pi h}{L}\Big|^{-1}\Big)\sum_{M/2\leqslant m<M}\frac{1}{m}\sum_{k<m}\Big|F_{\lambda-1}\Big(h-\frac{k}{m}q_{\lambda-1}\Big)\Big|\\
&\ll L' L\log(L)\max_{\theta\in\mathbb{R}} S_I'(\theta) \ll x\log(x)\max_{\theta\in\mathbb{R}} S_I'(\theta)\end{aligned}$$

d'après le lemme 7, avec

$$S_I'(\theta) = \sum_{M/2\leqslant m<M}\frac{1}{m}\sum_{k<m}\Big|F_{\lambda-1}\Big(\theta-\frac{k}{m}q_{\lambda-1}\Big)\Big|.$$

En regroupant les nombres entiers k tels que $(k,m)=d$ avec $1\leqslant d\leqslant M$, on obtient la majoration

$$S_I'(\theta) \leqslant \sum_{1\leqslant d\leqslant M}\frac{1}{d}\sum_{M/(2d)\leqslant m<M/d}\frac{1}{m}\sum_{\substack{k<m\\ (k,m)=1}}\Big|F_{\lambda-1}\Big(\theta-\frac{k}{m}q_{\lambda-1}\Big)\Big|.$$

Pour $1\leqslant d\leqslant M$, $\lambda_d = v(M^2/d^2)$. Alors, $1=\lambda_M\leqslant\cdots\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1=\nu$. D'après le lemme 3 et la formule (22), on a

$$|F_{\lambda-1}(t)| = |F^{[\lambda_d]}_{\lambda-1-\lambda_d}(t)|\cdot\Big|F_{\lambda_d}\Big(\frac{t}{q^{[\lambda_d]}_{\lambda-1-\lambda_d}}\Big)\Big| \leqslant e^{-\sigma(\lambda_d,\lambda-1)}\,\Big|F_{\lambda_d}\Big(\frac{t}{q^{[\lambda_d]}_{\lambda-1-\lambda_d}}\Big)\Big|.$$

La décroissance de $r\mapsto\sigma(r,\cdot)$ entraîne que

$$|F_{\lambda-1}(t)| \leqslant e^{-\sigma(\nu,\lambda-1)}\Big|F_{\lambda_d}\Big(\frac{t}{q^{[\lambda_d]}_{\lambda-1-\lambda_d}}\Big)\Big|.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Comme $q_{\lambda_d} q_{\lambda-1-\lambda_d}^{[\lambda_d]} = q_{\lambda-1}$, on a

$$F_{\lambda_d}\Big(\frac{\theta - \frac{k}{m} q_{\lambda-1}}{q_{\lambda-1-\lambda_d}^{[\lambda_d]}}\Big) = \frac{1}{q_{\lambda_d}} \sum_{n<q_{\lambda_d}} f(n)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{n\theta}{q_{\lambda_d} q_{\lambda-1-\lambda_d}^{[\lambda_d]}} + \frac{nkq_{\lambda-1}}{mq_{\lambda_d} q_{\lambda-1-\lambda_d}^{[\lambda_d]}}\Big)$$
$$= \frac{1}{q_{\lambda_d}} \sum_{n<q_{\lambda_d}} f(n)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{n\theta}{q_{\lambda-1}} + \frac{nk}{m}\Big),$$

donc

$$S_I'(\theta) \leqslant e^{-\sigma(\nu,\lambda-1)} \sum_{1\leqslant d\leqslant M} \frac{S_I''(\theta,d)}{dq_{\lambda_d}}$$

avec

$$S_I''(\theta,d) = \sum_{M/(2d)\leqslant m<M/d} \sum_{\substack{k<m\\(k,m)=1}} \frac{1}{m} \Big| \sum_{n<q_{\lambda_d}} f(n)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{n\theta}{q_{\lambda-1}} + \frac{nk}{m}\Big)\Big|.$$

Comme

$$\sum_{M/(2d)\leqslant m<M/d} \sum_{\substack{k<m\\(k,m)=1}} \frac{1}{m^2} \leqslant \sum_{M/(2d)\leqslant m<M/d} \frac{1}{m} \leqslant \sum_{M/(2d)\leqslant m<M/d} \frac{2d}{M} \leqslant 2,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$S_I''(\theta,d)^2 \leqslant 2 \sum_{M/(2d)\leqslant m<M/d} \sum_{\substack{k<m\\(k,m)=1}} \Big| \sum_{n<q_{\lambda_d}} f(n)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{n\theta}{q_{\lambda-1}} + \frac{nk}{m}\Big)\Big|^2$$

et l'inégalité du grand crible (cf. lemme 9) donne la majoration

$$S_I''(\theta,d)^2 \ll \Big(q_{\lambda_d} + \frac{M^2}{d^2}\Big) q_{\lambda_d} \ll q_{\lambda_d}^2.$$

On en déduit que

$$S_I'(\theta) \ll e^{-\sigma(\nu,\lambda-1)} \sum_{1\leqslant d\leqslant M} \frac{1}{d} \ll (\log x)\ e^{-\sigma(\nu,\lambda-1)},$$

ce qui permet d'obtenir (31). □

7. Sommes de type II

Soit $(q_n)_{n\geqslant 0}$ une échelle de numération tempérée, σ une fonction satisfaisant à (21) et $f \in \mathcal{F}_\sigma$. L'objectif de ce paragraphe est d'estimer pour $\xi \in]0,1/2[$, $x \geqslant 2$, $x^\xi \leqslant M \leqslant N$, $MN \leqslant x$, $(c_m)_{m\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ des suites de nombres complexes telles que pour tout m,n, $|c_m| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$, la somme de type II

$$S_{II} = \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N} c_m b_n f(mn).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Nous notons μ la valuation de M dans $(q_n)_{n\geqslant 1}$, soit

$$q_{\mu-1} \leqslant M < q_\mu.$$

Remarquons que les hypothèses entraînent l'inégalité $q_{\mu-1} \leqslant x/M$.

Proposition 4. *Il existe $c \in]0,1[$ et $\mu_0 > 0$ tels que sous ces hypothèses, pour $\mu \geqslant \mu_0$,*

$$S_{II} \ll x(\log x)^{1/2} \max\left(\tau(q_{v(x)}), \log x\right)^{1/4} e^{-\sigma(c\mu,\mu-1)/2}.$$

Les constantes c,μ_0 et la constante implicite ne dépendent que de ξ et $(q_n)_{n\geqslant 1}$.

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de la proposition 4. Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$S_{II}^2 \leqslant M \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} \Big| \sum_{N/2<n\leqslant N} b_n f(mn) \Big|^2. \tag{32}$$

7.1. Première application de l'inégalité de van der Corput, propagation de retenues

Nous appliquons à la somme en m dans (32) l'inégalité de van der Corput, soit le lemme 6 avec $k=1$ et $R = q_\rho^{[\mu]}$, où ρ est un nombre entier $\geqslant 1$ qui sera fixé ultérieurement (cf. §7.7) de manière à ce que

$$R \ll q_{\mu-1} \tag{33}$$

et

$$q_{\mu+2\rho-1} \leqslant x. \tag{34}$$

En particulier, on a $R \ll x/M$. Notons que l'existence d'un tel ρ sera garantie par le fait que l'échelle $(q_n)_{n\geqslant 0}$ est tempérée. On a

$$\Big| \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N} b_n f(mn) \Big|^2 \ll \frac{x}{MR}\left(\frac{x}{M} + \sum_{1\leqslant r<R}\left(1-\frac{r}{R}\right) \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N-r} \Re\Big(b_{n+r}\overline{b_n} f(mn+mr)\overline{f(mn)}\Big)\right).$$

En conséquence,

$$S_{II}^2 \ll \frac{x^2}{R} + \frac{x}{R}\sum_{1\leqslant r<R}\left(1-\frac{r}{R}\right)\Re(S_0(r))$$

avec

$$S_0(r) = \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N-r} b_{n+r}\overline{b_n} f(mn+mr)\overline{f(mn)}.$$

On échange les sommes en m et en n, puis on applique l'inégalité triangulaire:

$$S_{II}^2 \ll \frac{x^2}{R} + \frac{x}{R}\sum_{1\leqslant r<R} S_1(r),$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

avec

$$S_1(r) = \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N} \Big| \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant N} f(mn+mr)\overline{f(mn)} \Big|.$$

Posons $\mu_2 = \mu + 2\rho$, fixons $r \in \{1,\dots,R-1\}$. Pour tout $m \in]M/2,M]$, on a $mr < q_\mu q_\rho^{[\mu]} = q_{\mu+\rho}$. Majorons le nombre $E(M,N,\rho)$ de couples $(m,n) \in]M/2,M]\times]N/2,N]$ tels que

$$f(mn+mr)\overline{f(mn)} \neq f_{\mu_2}(mn+mr)\overline{f_{\mu_2}(mn)}. \tag{35}$$

Comme f est fortement A-multiplicative et à valeurs dans le cercle unité, une condition nécessaire pour que (m,n) vérifie (35) est que l'addition $mn \mapsto mn+mr$ modifie au moins un chiffre de mn d'indice au moins μ_2, donc que l'on ait pour tout nombre entier j:

$$\mu+\rho \leqslant j \leqslant \mu_2 - 1 \implies \varepsilon_j(mn) = a_j - 1. \tag{36}$$

Il suffit par conséquent d'évaluer le nombre de couples $(m,n) \in]M/2,M]\times]N/2,N]$ tels que

$$mn = kq_{\mu_2} + K + t$$

avec $0 \leqslant k < x/q_{\mu_2}$, $K = \sum_{\mu+\rho\leqslant j<\mu_2}(a_j-1)q_j$ et $0 \leqslant t < q_{\mu+\rho}$. À k et m fixés, le nombre d'entiers n satisfaisant à cette condition est $\ll q_{\mu+\rho}/m$. On a par conséquent

$$E(M,N,\rho) \ll \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M}\ \sum_{k\leqslant x/q_{\mu_2}} q_{\mu+\rho}/m \ll \frac{xq_{\mu+\rho}}{q_{\mu_2}}.$$

On a donc

$$|S_{II}|^2 \ll \frac{x^2}{R} + \frac{x^2 q_{\mu+\rho}}{q_{\mu+2\rho}} + \frac{x}{R}\sum_{r=1}^{R}\ \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N} \Big| \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} f_{\mu_2}(mn+mr)\overline{f_{\mu_2}(mn)} \Big|.$$

Nous élevons au carré, utilisons l'inégalité $(a+b+c)^2 \ll a^2+b^2+c^2$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la double somme en r et n. Compte tenu de l'inégalité $MN \leqslant x$, nous obtenons

$$|S_{II}|^4 \ll \frac{x^4}{R^2} + \frac{x^4 q_{\mu+\rho}^2}{q_{\mu_2}^2} + \frac{x^3}{MR}\sum_{r=1}^{R}\ \sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N} \Big| \sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} f_{\mu_2}(mn+mr)\overline{f_{\mu_2}(mn)} \Big|^2.$$

7.2. Deuxième application de l'inégalité de van der Corput

On pose alors

$$\mu_1 = \mu - 2\rho$$

et l'on applique à la somme en m une variante de l'inégalité de van der Corput, soit le lemme 6, avec

$$k = q_{\mu_1} \qquad \text{et} \qquad R = S = q_{2\rho-1}^{[\mu-2\rho]},$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

en notant que $kS \leqslant q_{\mu-1} \leqslant M$. Cela fournit la majoration

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} f_{\mu_2}(mn+nr)\overline{f_{\mu_2}(mn)}\Big|^2\\ &\quad\ll \frac{M}{S}\Bigg(M+2\sum_{1\leqslant s<S}\Big(1-\frac{s}{S}\Big)\\ &\qquad\sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M-q_{\mu_1}s}\Re\Big(f_{\mu_2}((m+q_{\mu_1}s)(n+r))\overline{f_{\mu_2}((m+q_{\mu_1}s)n)f_{\mu_2}(m(n+r))}f_{\mu_2}(mn)\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

Afin d'alléger l'écriture, nous introduisons les notations

$$I = I(s) =]M/2, M-q_{\mu_1}s]\cap\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad J =]N/2, N]\cap\mathbb{Z}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{\frac{N}{2}<n\leqslant N}\Big|\sum_{\frac{M}{2}<m\leqslant M} f_{\mu_2}(mn+mr)\overline{f_{\mu_2}(mn)}\Big|^2 \ll \frac{xMR}{S}+\frac{M}{S}\Re(S_2)$$

avec

$$S_2 = \sum_{1\leqslant r<R}\sum_{1\leqslant s<S}\Big(1-\frac{s}{S}\Big)S_2'(r,s)$$

où

$$S_2'(r,s) = \sum_{(m,n)\in I\times J} f_{\mu_2}((m+q_{\mu_1}s)(n+r))\overline{f_{\mu_2}((m+q_{\mu_1}s)n)f_{\mu_2}(m(n+r))}f_{\mu_2}(mn).$$

À ce stade, nous avons établi la majoration

$$|S_{II}|^4 \ll x^4\Big(\frac{1}{R^2}+\frac{q_{\mu+\rho}^2}{q_{\mu+2\rho}^2}+\frac{1}{S}\Big)+\frac{x^3}{RS}\sum_{1\leqslant r<R}\sum_{1\leqslant s<S}|S_2'(r,s)|.$$

Pour clore ce paragraphe, on remarque que pour tous nombres entiers ℓ et k,

$$\overline{f_{\mu_2}(\ell+kq_{\mu_1})}f_{\mu_2}(\ell) = \overline{f_{\mu_1,\mu_2}(\ell+kq_{\mu_1})}f_{\mu_1,\mu_2}(\ell),$$

d'où

$$\begin{aligned}&S_2'(r,s)\\ &\quad= \sum_{(m,n)\in I\times J} f_{\mu_1,\mu_2}(mn+mr+q_{\mu_1}sn+q_{\mu_1}rs)\overline{f_{\mu_1,\mu_2}(mn+mr)f_{\mu_1,\mu_2}(mn+q_{\mu_1}sn)}f_{\mu_1,\mu_2}(mn).\end{aligned}$$

7.3. Détection des chiffres de rang intermédiaire, polynômes de Vaaler

Pour $a\in\mathbb{N}^*$, désignons par $\mathbf{r}_{\mu_1,\mu_2}(a)$ l'unique nombre entier $u\in\{0,\dots,q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}-1\}$ tel que

$$a = kq_{\mu_2}+uq_{\mu_1}+v$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

avec $k \in \mathbb{N}$ et $v \in \{0,\dots,q_{\mu_1}-1\}$. On a l'équivalence

$$\mathbf{r}_{\mu_1,\mu_2}(a) = u \Longleftrightarrow \Big\{\frac{a}{q_{\mu_2}}\Big\} \in \Big[\frac{u}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}, \frac{u+1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big[\bmod 1.$$

Pour évaluer S_2', posons $\mathbf{r}_{\mu_1,\mu_2}(mn) = u_0$ et $\mathbf{r}_{\mu_1,\mu_2}(m(n+r)) = u_1$ avec $0 \leqslant u_0, u_1 < q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}$. Posons $g(n) = f^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}(n)$ (cf. §2.1). On remarque que, d'après (7),

$$\begin{aligned} f_{\mu_2,\mu_1}(mn+mr+q_{\mu_1}sn+q_{\mu_1}rs) &= g(u_1+sn+rs)\\ f_{\mu_1,\mu_2}(mn+mr) &= g(u_1)\\ f_{\mu_1,\mu_2}(mn+q_{\mu_1}sn) &= g(u_0+sn)\\ f_{\mu_1,\mu_2}(mn) &= g(u_0). \end{aligned}$$

En désignant par χ_α la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\alpha[$ modulo 1, on a ainsi

$$\begin{aligned} &S_2'(r,s)\\ &= \sum_{(m,n)\in I\times J}\ \sum_{0\leqslant u_0,u_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \chi_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big(\frac{mn}{q_{\mu_2}} - \frac{u_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)\chi_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}} - \frac{u_1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)\\ &\quad\times g(u_1+sn+rs)\overline{g}(u_1)\overline{g}(u_0+sn)g(u_0). \end{aligned}$$

Le lemme 5, appliqué avec

$$H_1 = H_2 = H = q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}S, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}, \tag{37}$$

conduit à la décomposition

$$S_2'(r,s) = S_4(r,s) + O(E_4(r,0)+E_4(0,r)+E_4'(r)) \tag{38}$$

avec

$$\begin{aligned} &S_4(r,s)\\ &= \sum_{(m,n)\in I\times J}\ \sum_{0\leqslant u_0,u_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} A_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H}\Big(\frac{mn}{q_{\mu_2}} - \frac{u_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)A_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H}\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}} - \frac{u_1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)\\ &\quad\times g(u_1+sn+rs)\overline{g}(u_1)\overline{g}(u_0+sn)g(u_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4(r,r') = &\sum_{(m,n)\in I\times J}\ \sum_{0\leqslant u_0<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} B_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H}\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}} - \frac{u_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)\\ &\times \sum_{0\leqslant u_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \chi_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big(\frac{mn+mr'}{q_{\mu_2}} - \frac{u_1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big) \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

et

$$E_4'(r)=\sum_{(m,n)\in I\times J}\sum_{0\leqslant u_0<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} B_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H}\Big(\frac{mn}{q_{\mu_2}}-\frac{u_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)$$
$$\times\sum_{0\leqslant u_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} B_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H}\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}}-\frac{u_1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big).$$

Dans la suite, afin d'évaluer S_2', nous exploitons les propriétés des polynômes trigonométrique $A_{\alpha,H}$ et $B_{\alpha,H}$ rappelées au lemme 4.

7.3.1. Majoration de $E_4(r,r')$. De l'identité

$$\sum_{0\leqslant u_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \chi_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big(t-\frac{u_1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)=1,$$

valable pour tout $t\in\mathbb{R}$, nous déduisons

$$E_4(r,r')=\sum_{(m,n)\in I\times J}\sum_{0\leqslant u_0<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} B_{1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H}\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}}-\frac{u_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)$$
$$=\sum_{|h|\leqslant H} b_h(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)\sum_{(m,n)\in I\times J}\sum_{0\leqslant u_0<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \mathrm{e}\Big(h\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}}-\frac{hu_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big).$$

Compte tenu de la relation (1), il s'ensuit

$$E_4(r,r')=q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}\sum_{\substack{|h|\leqslant H\\ h\equiv 0 \bmod q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}} b_h(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)\sum_{(m,n)\in I\times J}\mathrm{e}\Big(h\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}}\Big).$$

Nous posons $h=h'q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}$ dans la somme en h, puis appliquons l'inégalité triangulaire et la majoration $|b_h(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)|\leqslant 1/H$. Nous obtenons de la sorte

$$|E_4(r,r')|\leqslant\frac{1}{S}\sum_{|h'|\leqslant S}\sum_{0\leqslant m<M}\Big|\sum_n \mathrm{e}\Big(\frac{h'mn}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|$$
$$\ll\frac{1}{S}\sum_{|h'|\leqslant S}\sum_{0\leqslant m<M}\min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\Big(\pi\frac{h'm}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|^{-1}\Big).$$

Nous posons alors $m=kq_{\mu_1}+m'$ avec $k\leqslant M/q_{\mu_1}$ et $0\leqslant m'<q_{\mu_1}$ pour aboutir à

$$|E_4(r,r')|\ll\frac{M}{Sq_{\mu_1}}\sum_{|h'|\leqslant S}\sum_{0\leqslant m<q_{\mu_1}}\min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\Big(\pi\frac{h'm}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|^{-1}\Big)$$

Nous distinguons la contribution du terme correspondant à $h'=0$ et majorons la contribution des h' restants en utilisant le lemme 8:

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}E_4(r,r') &\ll \frac{x}{S} + \frac{M}{q_{\mu_1}}\Big(\tau(q_{\mu_1})\frac{x}{M} + q_{\mu_1}\log(q_{\mu_1})\Big)\\ &\ll \frac{x}{S} + \max(\tau(q_{\mu_1}),\log(q_{\mu_1}))\Big(\frac{x}{q_{\mu_1}} + M\Big)\\ &\ll x\max\big(\tau(q_{v(x)}),\log x\big)\Big(\frac{1}{S} + \frac{1}{q_{\mu_1}}\Big),\end{aligned}$$

puisque $x/M \geqslant q_\mu$.

7.3.2. Majoration de $E_4'(r)$. On commence par effectuer les sommes sur u_0 et u_1. Compte tenu de la relation (1), nous avons

$$\begin{aligned}E_4'(r) = &\sum_{|h_0|,|h_1|\leqslant H} b_{h_0}(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)b_{h_1}(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)\\ &\times \sum_{(m,n)\in I\times J}\ \sum_{0\leqslant u_0,u_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \mathrm{e}\Big(h_0\frac{mn}{q_{\mu_2}} - \frac{h_0u_0}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)\mathrm{e}\Big(h_1\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}} - \frac{h_1u_1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\Big)\\ = &(q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1})^2 \sum_{|h_0'|,|h_1'|\leqslant S} b_{h_0'q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)b_{h_1'q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)\\ &\times \sum_{(m,n)\in I\times J} \mathrm{e}\Big(\frac{mn(h_0'+h_1')+mrh_1'}{q_{\mu_1}}\Big).\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité triangulaire et la majoration $|b_h(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)| \leqslant 1/H$ pour obtenir

$$|E_4'(r)| \leqslant \frac{1}{S^2}\sum_{0\leqslant|h_0'|,|h_1'|\leqslant S}\Big|\sum_{(m,n)\in I\times J}\mathrm{e}\Big(\frac{mn(h_0'+h_1')+mrh_1'}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|.$$

Le module de la double somme sur m et n n'excède pas x, donc la contribution des couples (h_0',h_1') tels que $h_0'+h_1' = 0$ est $O(x/S)$. La contribution des couples (h_0',h_1') tels que $h_0'+h_1' \neq 0$ est quant à elle majorée par

$$E_5(r) = S^{-2}\sum_{\substack{0\leqslant|h_0'|,|h_1'|\leqslant S\\ h_0'+h_1'\neq 0}}\ \sum_{m\leqslant M}\min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\Big(\pi\frac{m(h_0'+h_1')}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|^{-1}\Big).$$

En posant $h' = h_0'+h_1'$, nous parvenons à

$$\begin{aligned}E_5(r) &\ll \frac{1}{S}\sum_{1\leqslant|h'|\leqslant 2S}\ \sum_{m\leqslant M}\min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\Big(\pi\frac{mh'}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|^{-1}\Big)\\ &\ll \frac{M}{q_{\mu_1}S}\sum_{1\leqslant|h'|\leqslant 2S}\ \sum_{0\leqslant t<q_{\mu_1}}\min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\Big(\pi\frac{th'}{q_{\mu_1}}\Big)\Big|^{-1}\Big).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

D'après le lemme 8,

$$E_5(r) \ll \frac{M}{q_{\mu_1}}\Big(\tau(q_{\mu_1})\frac{x}{M} + q_{\mu_1}\log q_{\mu_1}\Big) \ll \frac{x}{q_{\mu_1}} \max\big(\tau(q_{v(x)}), \log x\big).$$

On a donc

$$E_4'(r) \ll x \max\big(\tau(q_{v(x)}), \log x\big)\Big(\frac{1}{S} + \frac{1}{q_{\mu_1}}\Big).$$

Nous avons ainsi établi que

$$S_2'(r,s) = S_4(r,s) + O\Big(x \max\big(\tau(q_{v(x)}), \log x\big)\Big(\frac{1}{S} + \frac{1}{q_{\mu_1}}\Big)\Big).$$

On a donc à ce stade

$$|S_{II}|^4 \ll x^4\Big(\frac{1}{R^2} + \frac{q_{\mu+\rho}^2}{q_{\mu+2\rho}^2} + \frac{1}{S}\Big) + x^4 \max\big(\tau(q_{v(x)}), \log x\big)\Big(\frac{1}{S} + \frac{1}{q_{\mu_1}}\Big) \qquad (39)$$
$$+ \frac{x^3}{RS} \sum_{1 \leqslant r < R} \sum_{1 \leqslant s < S} |S_4(r,s)|.$$

7.4. Analyse de Fourier de $S_4(r,s)$

Rappelons que

$$S_4(r,s) = \sum_{(m,n) \in I \times J} \sum_{0 \leqslant u_0, u_1 < q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} A_{1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}, H}\Big(\frac{mn}{q_{\mu_2}} - \frac{u_0}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big) A_{1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}, H}\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}} - \frac{u_1}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big)$$
$$\times g(u_1 + sn + rs)\overline{g}(u_1)\overline{g}(u_0 + sn) g(u_0),$$

avec $g(k) = \mathrm{e}\big(\alpha f_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(k)\big)$, suite $q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$-périodique. Nous posons

$$u_0 + sn \equiv u_2 \bmod q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]} \qquad \text{et} \qquad u_1 + sn + rn \equiv u_3 \bmod q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}.$$

En utilisant la relation (1), nous aboutissons à l'identité

$$S_4(r,s) = \sum_{0 \leqslant |h_0|, |h_1| \leqslant H} a_{h_0}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}, H)\, a_{h_1}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}, H)$$
$$\times \sum_{0 \leqslant u_0, u_1, u_2, u_3 < q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} g(u_3)\overline{g}(u_1)\overline{g}(u_2) g(u_0)$$

$$\times \sum_{(m,n) \in I \times J} \mathrm{e}\Big(h_0\Big(\frac{mn}{q_{\mu_2}} - \frac{u_0}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big) + h_1\Big(\frac{mn+mr}{q_{\mu_2}} - \frac{u_1}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big)\Big)$$
$$\times (q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]})^{-2} \sum_{0 \leqslant h_2, h_3 < q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \mathrm{e}\Big(h_2 \frac{u_0 + sn - u_2}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} + h_3 \frac{u_1 + sn + sr - u_3}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Rappelons la définition de $F_\lambda^{[h]}$ en (22). En effectuant les sommes en u_0, u_1, u_2 et u_3, nous obtenons

$$\begin{aligned}S_4(r,s) &= (q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]})^2 \sum_{0\leqslant |h_0|,|h_1|\leqslant H} a_{h_0}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]},H)a_{h_1}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]},H)\\ &\quad\times \sum_{0\leqslant h_2,h_3<q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3)\overline{F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}(h_3-h_1)F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_0-h_2)\overline{F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}(-h_2)\,\mathrm{e}\Big(\frac{h_3sr}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big)\\ &\quad\times \sum_{(m,n)\in I\times J} \mathrm{e}\Big(\frac{(h_0+h_1)mn+h_1mr+(h_2+h_3)snq_{\mu_1}}{q_{\mu_2}}\Big)\\ &= S_4'(r,s)+S_4''(r,s),\end{aligned}$$

où S_4' et S_4'' correspondent respectivement aux contributions des couples (h_0,h_1) tels que $h_0+h_1=0$ et $h_0+h_1\neq 0$.

7.5. Majoration de S_4'

Lorsque $h_0+h_1=0$ les sommations sur m et n sont indépendantes. Supposons que

$$HR\leqslant q_{\mu_2}/2. \tag{40}$$

On a alors

$$\Big|\sum_{m\in I}\mathrm{e}\Big(\frac{h_1mr}{q_{\mu_2}}\Big)\Big| \leqslant \min\Big(M,\Big|\sin\frac{\pi h_1 r}{q_{\mu_2}}\Big|^{-1}\Big)\leqslant \min\Big(M,\frac{q_{\mu_2}}{|h_1|r}\Big). \tag{41}$$

Par ailleurs,

$$\Big|\sum_{n\in J}\mathrm{e}\Big(\frac{(h_2+h_3)snq_{\mu_1}}{q_{\mu_2}}\Big)\Big|\leqslant \min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\frac{\pi(h_2+h_3)s}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big|^{-1}\Big).$$

En posant $h=h_2+h_3$ et en utilisant la $q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$-périodicité de $F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$, nous obtenons la majoration

$$|S_4'(r,s)|\leqslant S_5(r,s),$$

avec

$$\begin{aligned}S_5(r,s) = (q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]})^2 &\sum_{|h_1|\leqslant H} |a_{h_1}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]},H)|^2 \min\Big(M,\frac{q_{\mu_2}}{|h_1|r}\Big)\\ &\sum_{0\leqslant h<q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \min\Big(\frac{x}{M},\Big|\sin\frac{\pi hs}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}\Big|^{-1}\Big)S_6(h,h_1),\end{aligned}$$

où

$$S_6(h,h_1)=\sum_{0\leqslant h_3<q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \big|F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3-h_1-h)F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3-h_1)F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3-h)F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3)\big|.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la $q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$-périodicité de $F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$, on a

$$S_6(h,h_1) \leqslant S_7(h_1)$$

pour tout $h \in \mathbb{Z}$, avec

$$S_7(h_1) = \sum_{0 \leqslant h_3 < q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \left| F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3 - h_1) F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3) \right|^2.$$

D'après le lemme 8, nous avons

$$\frac{1}{S} \sum_{1 \leqslant s < S} \sum_{0 \leqslant h < q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \min\left(\frac{x}{M}, \left| \sin \frac{\pi h s}{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \right|^{-1} \right) \ll \frac{x}{M} \tau(q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}) + q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]} \log q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}.$$

On a $q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]} \mid q_{\mu_2} = q_{\mu+2\rho}$. Or, d'après (34), on a $\mu + 2\rho \leqslant v(x)$ et, par conséquent, $q_{\mu+2\rho} \mid q_{v(x)}$. Il en résulte que

$$\tau(q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}) \leqslant \tau(q_{v(x)}).$$

Nous obtenons donc

$$\frac{1}{RS} \sum_{\substack{1 \leqslant r < R \\ 1 \leqslant s < S}} |S_4'(r,s)| \ll \frac{x}{M} \max\left(\tau(q_{v(x)}), \log x\right) \left(1 + \frac{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}{q_{\mu-1}}\right) \left(\frac{1}{R} \sum_{1 \leqslant r < R} S_8(r)\right), \tag{42}$$

avec

$$S_8(r) = (q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]})^2 \sum_{|h_1| \leqslant H} |a_{h_1}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}, H)|^2 \min\left(M, \frac{q_{\mu_2}}{|h_1| r}\right) S_7(h_1).$$

Nous subdivisons la somme sur h_1 en trois sommes $S_8'(r)$, $S_8''(r)$ et $S_8'''(r)$ suivant que $|h_1| \leqslant q_{\mu_2}/M$, $q_{\mu_2}/M < |h_1| \leqslant q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$ ou $q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]} < |h_1| \leqslant H$.

7.5.1. Majoration de $S_8'(r)$. La majoration $\left| a_{h_1}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}, H) \right| \leqslant 1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}$ et l'identité de Parseval conduisent à

$$\begin{aligned} S_8'(r) &\leqslant M \sum_{|h_1| \leqslant q_{\mu_2}/M} S_7(h_1) \\ &\leqslant M \left(\max_{h' \in \mathbb{Z}} \sum_{|h| < q_{\mu_2}/M} \left| F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h+h') \right|^2 \right) \sum_{0 \leqslant h_3 < q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \left| F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3) \right|^2 \\ &= M \max_{h' \in \mathbb{Z}} \sum_{|h| < q_{\mu_2}/M} \left| F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h+h') \right|^2. \end{aligned}$$

Notons que $q_{\mu_2}/M \leqslant q_{\mu_2}/q_{\mu-1} = a_{\mu-1} \cdots a_{\mu_2-1} = q_{\mu_2-\mu+1}^{[\mu-1]}$, d'où

$$S_8'(r) \leqslant 2M \max_{h' \in \mathbb{Z}} \sum_{0 \leqslant h < q_{\mu_2-\mu+1}^{[\mu-1]}} \left| F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h+h') \right|^2.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Utilisons à présent le lemme 3 avec (μ,λ,k) remplacé par $(\mu-1-\mu_1,\mu_2-\mu_1,\mu_1)$: pour tout $h\in\mathbb{Z}$,

$$F^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}(h)=F^{[\mu_1]}_{\mu-1-\mu_1}\left(\frac{h}{q^{[\mu-1]}_{\mu_2-\mu+1}}\right)F^{[\mu-1]}_{\mu_2-\mu+1}(h).$$

Comme $f\in\mathcal{F}_\sigma$, (22) donne

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|F^{[\mu_1]}_{\mu-1-\mu_1}(t)\right|\leqslant e^{-\sigma(\mu_1,\mu_1+\mu-1-\mu_1)}=e^{-\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)},$$

et, avec l'identité de Parseval, nous en déduisons que

$$\frac{1}{R}\sum_{1\leqslant r<R}S_8'(r)\leqslant 2Me^{-2\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)}.$$

7.5.2. Majoration de $S_8''(r)$. Nous utilisons là encore la majoration $|a_{h_1}(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)|\leqslant 1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}$ pour obtenir, grâce à l'identité de Parseval,

$$\begin{aligned}S_8''(r)&\leqslant\frac{q_{\mu_2}}{r}\sum_{q_{\mu_2}/M<|h_1|\leqslant q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}\frac{S_7(h_1)}{|h_1|}\\&\leqslant\frac{M}{r}\sum_{1\leqslant|h_1|\leqslant q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}S_7(h_1)\ll\frac{M}{r}.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\frac{1}{R}\sum_{1\leqslant r<R}S_8''(r)\ll\frac{M\log R}{R}=\frac{M}{q^{[\mu]}_\rho}\log q^{[\mu]}_\rho.$$

7.5.3. Majoration de $S_8'''(r)$. On utilise cette fois la majoration $|a_{h_1}(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)|\leqslant 1/(\pi|h_1|)$, qui conduit à

$$S_8'''(r)\ll(q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1})^2\,\frac{q_{\mu_2}}{r}\sum_{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}<|h_1|\leqslant H}\frac{S_7(h_1)}{|h_1|^3}.$$

La fonction $h_1\mapsto S_7(h_1)$ est $q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}$-périodique. En décomposant la sommation en h_1 suivant les intervalles $jq^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}<|h_1|\leqslant(j+1)q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}$ pour $1\leqslant j\leqslant H/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}$ et en majorant $|h_1|^{-3}$ par $j^{-3}(q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1})^{-3}$, on obtient

$$\begin{aligned}S_8'''(r)&\ll(q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1})^2\frac{q_{\mu_2}}{r}\sum_{j\geqslant1}\frac{1}{j^3(q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1})^3}\sum_{0\leqslant h_1<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}S_7(h_1)\\&\ll\frac{q_{\mu_2}}{rq^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}}=\frac{q_{\mu_1}}{r}\leqslant\frac{M}{r}\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

et, par suite,

$$\frac{1}{R}\sum_{1\leqslant r<R} S_8'''(r) \leqslant \frac{M}{q_\rho^{[\mu]}}\log q_\rho^{[\mu]}.$$

On a donc établi la majoration

$$\frac{1}{R}\sum_{1\leqslant r<R} S_8(r) \ll M\Big(e^{-2\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)}+\frac{\log q_\rho^{[\mu]}}{q_\rho^{[\mu]}}\Big).$$

En reportant dans (42), il vient

$$\frac{1}{RS}\sum_{\substack{1\leqslant r<R\\ 1\leqslant s<S}} |S_4'(r,s)| \ll x\max\big(\tau(q_{v(x)}),\log x\big)(\log x)\Big(1+\frac{q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}}{q_{\mu-1}}\Big)\Big(e^{-2\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)}+\frac{1}{q_\rho^{[\mu]}}\Big). \tag{43}$$

7.6. Majoration de S_4''

On effectue la sommation sur m et l'on obtient

$$\begin{aligned} S_4''(r,s) \leqslant & (q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]})^2 \sum_{|h_0|\leqslant H}\ \sum_{\substack{|h_1|\leqslant H\\ h_0+h_1\neq 0}} \big|a_{h_0}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]},H)a_{h_1}(1/q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]},H)\big| \\ & \times \sum_{0\leqslant h_3<q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \big|F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3)F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_3-h_1)\big| \\ & \times \sum_{0\leqslant h_2<q_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}} \big|F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(h_0-h_2)F_{\mu_2-\mu_1}^{[\mu_1]}(-h_2)\big| \\ & \times \sum_{n\leqslant N} \min\Big(M,\Big|\sin\pi\frac{(h_0+h_1)n+h_1r}{q_{\mu_2}}\Big|^{-1}\Big). \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, nous posons $n=kq_{\mu_2}+t$ avec $0\leqslant k\leqslant N/q_{\mu_2}$ et $0\leqslant t<q_{\mu_2}$ et nous appliquons le lemme 7 à la somme en t. Comme $|h_0+h_1|\leqslant 2H$ et $q_{\mu_2}\leqslant Hq_\mu$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant N} \min\Big(M,\Big|\sin\pi\frac{(h_0+h_1)n+h_1r}{q_{\mu_2}}\Big|^{-1}\Big) &\ll \Big\lceil\frac{N}{q_{\mu_2}}\Big\rceil\big((h_0+h_1,q_{\mu_2})M+q_{\mu_2}\log q_{\mu_2}\big) \\ &\ll \Big\lceil\frac{N}{q_{\mu_2}}\Big\rceil\big(HM+q_{\mu_2}\log q_{\mu_2}\big) \\ &\ll \Big\lceil\frac{N}{q_{\mu_2}}\Big\rceil HM\log q_{\mu_2} \ll \Big(1+\frac{x}{Mq_{\mu_2}}\Big)HM\log x. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Parseval donnent les majorations

$$\sum_{0\leqslant h_2<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \left|F^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}(h_0-h_2)F^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}(-h_2)\right| \leqslant 1$$
$$\sum_{0\leqslant h_3<q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \left|F^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}(h_3)F^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}(h_3-h_1)\right| \leqslant 1.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{|h|\leqslant H} |a_h(1/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1},H)| \leqslant \sum_{|h|\leqslant q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} \frac{1}{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}} + \sum_{q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}<|h|\leqslant H} \frac{1}{\pi|h|}$$
$$\ll 1+\log(H/q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1}) \ll \log x.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{RS}\sum_{\substack{1\leqslant r<R\\1\leqslant s<S}} |S_4''(r)| \ll (q^{[\mu_1]}_{\mu_2-\mu_1})^2(\log x)^3\Big(1+\frac{x}{Mq_{\mu_2}}\Big)HM \tag{44}$$
$$\leqslant x(\log x)^3(q^{[\mu-2\rho]}_{4\rho})^3 q^{[\mu-2\rho]}_{2\rho-1}\Big(\frac{M}{x}+\frac{1}{q_{\mu+2\rho}}\Big)$$
$$\leqslant x(\log x)^3\frac{(q^{[\mu-2\rho]}_{4\rho})^4}{q_{\mu-1}}.$$

Nous déduisons de (43) et (44) la majoration

$$\frac{1}{RS}\sum_{\substack{1\leqslant r<R\\1\leqslant s<S}} |S_4(r)| \ll x(\log x)^2\max\big(\tau(q_{v(x)}),\log x\big)\Big(K_1(\mu,\rho)+\frac{(q^{[\mu-2\rho]}_{4\rho})^4}{q_{\mu-1}}\Big) \tag{45}$$

avec

$$K_1(\mu,\rho)=\Big(1+\frac{q^{[\mu-2\rho]}_{4\rho}}{q_{\mu-1}}\Big)\Big(e^{-2\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)}+\frac{1}{q^{[\mu]}_{\rho}}\Big).$$

7.7. Fin de la majoration de S_{II}

En insérant (45) dans (39), nous obtenons que sous les conditions (33), (34) et (40), soit

$$q^{[\mu]}_{\rho} \ll q_{\mu-1} \tag{46}$$

$$q_{\mu+2\rho-1} \leqslant x \tag{47}$$

$$q^{[\mu-2\rho]}_{4\rho}q^{[\mu-2\rho]}_{2\rho-1}q^{[\mu]}_{\rho} \leqslant q_{\mu+2\rho}/2, \tag{48}$$

on a

$$S_{II}^4 \ll x^4(\log x)^2\max\big(\tau(q_{v(x)}),\log x\big)K_2(\mu,\rho),$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

avec

$$K_2(\mu,\rho) = \frac{1}{\big(q_\rho^{[\mu]}\big)^2} + \frac{1}{\big(q_\rho^{[\mu+\rho]}\big)^2} + \frac{1}{q_{2\rho-1}^{[\mu-2\rho]}} + \frac{1}{q_{\mu-2\rho}} + \frac{\big(q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]}\big)^4}{q_{\mu-1}} + K_1(\mu,\rho).$$

Il s'agit à présent de fixer la valeur de ρ en fonction de μ de manière à ce que (46), (47) et (48) soient bien vérifiées, puis d'évaluer K_2 pour μ suffisamment grand en tenant compte du fait que la base A est supposée tempérée.

Commençons par traiter la condition (47). D'après 12, il existe $d \in]0,1[$ et $x_0 > 0$ tels que $v(\sqrt{x}) \leqslant dv(x)$ pour tout $x \geqslant x_0$. On a donc $\mu \leqslant dv(x)$, puisque $\mu = v(M)$ et $M \leqslant \sqrt{x}$, ainsi qu'indiqué dans les premières lignes de la section 7. Pour satisfaire (47), il suffit alors de choisir $\rho = \lfloor c_1\mu \rfloor$ avec $c_1 = (\frac{1}{d} - 1)/2 > 0$. En effet, on aura pour $x \geqslant x_0$,

$$\mu + 2\rho \leqslant (1+2c_1)\mu \leqslant v(x),$$

ce qui entraîne bien (47). La condition $x \geqslant x_0$ est vérifiée pour μ suffisamment grand puisque $M \leqslant \sqrt{x}$.

Traitons maintenant les conditions (46) et (48). D'après la définition d'une base tempérée (*cf.* (11)), il existe $A > 0$ tel pour $\mu \geqslant 2$ et $\rho = \lfloor c_2\mu \rfloor$,

$$c_2 \leqslant \kappa(5,1)/8 \Rightarrow \ (q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]})^5 \leqslant Aq_{\mu-1}. \tag{49}$$

Si l'on pose

$$\rho = \lfloor c_2\mu \rfloor \qquad \text{avec } c_2 \leqslant \frac{\kappa(5,1)}{8} \in]0,1/8[,$$

les conditions (46) et (48) sont bien vérifiées: d'une part, on a $q_\rho^{[\mu]} \leqslant q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]}$ et, par conséquent, $q_\rho^{[\mu]} \ll q_{\mu-1}$; d'autre part, pour μ suffisamment grand, on a

$$q_{\mu-1} = \frac{q_{\mu+2\rho}}{q_{2\rho+1}^{[\mu-1]}} \leqslant \frac{q_{\mu+2\rho}}{2^{2\rho+1}} \leqslant \frac{q_{\mu+2\rho}}{2A},$$

d'où

$$q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]} q_{2\rho-1}^{[\mu-2\rho]} q_\rho^{[\mu]} \leqslant (q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]})^3 \leqslant (q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]})^5 \leqslant Aq_{\mu-1} \leqslant \frac{q_{\mu+2\rho}}{2}.$$

Finalement, nous choisissons $\rho = \lfloor c\mu \rfloor$ avec $c = \min(c_1,c_2)$ et μ suffisamment grand de sorte que les conditions (46), (47) et (48) soient bien vérifiées et que $c\mu \geqslant 2$.

À présent, montrons qu'il existe $c' > 0$ tel que pour $\rho' = \lfloor c'\mu \rfloor$,

$$K_2(\mu,\rho) \ll \frac{1}{q_{\rho'}} + e^{-2\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)}.$$

En appliquant (11) à diverses reprises, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
&c' \leqslant c\kappa_1/2 \Rightarrow \big(q_\rho^{[\mu]}\big)^2 \gg q_\rho^{[\mu]} \gg q_{\rho'} \qquad \text{avec } \kappa_1 = \kappa\Big(1,\frac{2}{c}\Big),\\
&c' \leqslant c\kappa_2/2 \Rightarrow (q_\rho^{[\mu+\rho]})^2 \gg q_{\rho'} \qquad \text{avec } \kappa_2 = \kappa\Big(\frac{1}{2},1+\frac{2}{c}\Big),\\
&c' \leqslant c\kappa_3/2 \Rightarrow q_{2\rho-1}^{[\mu-2\rho]} \gg q_{\rho'} \qquad \text{avec } \kappa_3 = \kappa\Big(1,\frac{2}{c}-2\Big).
\end{aligned} \tag{50}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Pour la dernière inégalité, on a en effet

$$\mu - 2\rho \leqslant \Big(\frac{2}{c} - 2\Big)\rho \leqslant \Big(\frac{2}{c} - 2\Big)(2\rho - 1).$$

Par définition de ρ et de ρ', on a directement

$$c' \leqslant 1 - 2c \Rightarrow q_{\mu-2\rho} \geqslant q_{\rho'}. \tag{51}$$

En conséquence, en posant

$$c' = \frac{1}{2}\min\Big(c\kappa_1, c\kappa_2, c\kappa_3, 2-4c\Big)$$

et en utilisant (50) et (51), il vient

$$\frac{1}{\big(q_\rho^{[\mu]}\big)^2} + \frac{1}{\big(q_\rho^{[\mu+\rho]}\big)^2} + \frac{1}{q_{2\rho-1}^{[\mu-2\rho]}} + \frac{1}{q_{\mu-2\rho}} \ll \frac{1}{q_{\rho'}}.$$

De plus, d'après (49) et (50),

$$\frac{\big(q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]}\big)^4}{q_{\mu-1}} \ll \frac{1}{q_{4\rho}^{[\mu-2\rho]}} \ll \frac{1}{q_{2\rho-1}^{[\mu-2\rho]}} \ll \frac{1}{q_{\rho'}}.$$

Il s'ensuit

$$K_2(\mu,\rho) \ll e^{-2\sigma(\mu-2\rho,\mu-1)} + \frac{1}{q_{\rho'}}.$$

Dans la suite, nous prenons μ suffisamment grand pour que $c'\mu \geqslant 2$.

Posons $d = 2/c'$, $\kappa_4 = \kappa(1,d)$, $c'' = \min(c, c\kappa_4/2) > 0$ et $\rho'' = \lfloor c''\mu \rfloor$. Alors, $2\rho \geqslant \rho''$. Par ailleurs,

$$\mu - \rho'' \leqslant \mu \leqslant \frac{2}{c'}\lfloor c'\mu \rfloor = d\rho' \quad \text{et}$$
$$\rho'' - 1 \leqslant \rho'' \leqslant c''\mu \leqslant \kappa_4 \frac{c'\mu}{2} \leqslant \kappa_4 \lfloor c'\mu \rfloor = \kappa_4\rho',$$

d'où $q_{\rho''-1}^{[\mu-\rho'']} \ll q_{\rho'}$.

Compte tenu de la décroissance de $r \mapsto \sigma(r,\cdot)$ et de la minoration (23), on a alors

$$K_2(\mu,\rho) \leqslant e^{-2\sigma(\mu-\rho'',\mu-1)} + \frac{1}{q_{\rho'}} \leqslant e^{-2\sigma(\mu-\rho'',\mu-1)}\Bigg(1 + \frac{q_{\rho''-1}^{[\mu-\rho'']}}{q_{\rho'}}\Bigg) \ll e^{-2\sigma(\mu-\rho'',\mu-1)}.$$

Nous obtenons l'existence de $c''' > 0$ tel que, pour μ suffisamment grand,

$$S_{II}^4 \ll x^4(\log x)^2 \max\big(\tau(q_{v(x)}), \log x\big)e^{-2\sigma(\mu-c'''\mu,\mu-1)},$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition 4.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

8. Démonstration du théorème principal

Le théorème 1 se déduit de façon classique des estimations de sommes de type I et II obtenues dans les paragraphes 6 et 7. La démarche est similaire à celle suivie par exemple dans [24]. Posons $u = x^{3/10}$. D'après l'identité de Vaughan (*cf.* par exemple [4, p. 139]), on a

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) f(n) = S_1 - S_2 + S_3 + O(u) \tag{52}$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{m \leqslant u \\ mn \leqslant x}} \mu(m) \log(n) f(mn), \\ S_2 &= \sum_{\substack{m_1 \leqslant u \\ m_2 \leqslant u \\ m_1 m_2 n \leqslant x}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) f(m_1 m_2 n), \\ S_3 &= \sum_{\substack{u < m < x \\ u < n_1 < x \\ m n_1 n_2 \leqslant x}} \mu(m) \Lambda(n_1) f(m n_1 n_2). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S_1 = \sum_{m \leqslant u} \mu(m) \sum_{n \leqslant x/m} f(mn) \int_1^n \frac{dt}{t} &= \sum_{m \leqslant u} \mu(m) \int_1^x \sum_{t < n \leqslant x/m} f(mn) \frac{dt}{t} \\ &\ll (\log x) \sum_{m \leqslant u} \max_{t \leqslant x/m} \Big| \sum_{t < n \leqslant x/m} f(mn) \Big| \\ &\ll (\log x) \sum_{m \leqslant u} \max_{t \leqslant x/m} \Big| \sum_{n < t} f(mn) \Big| \\ &\ll (\log x)^2 \max_{M \leqslant u} \sum_{M/2 < m \leqslant M} \max_{t \leqslant x/m} \Big| \sum_{n < t} f(mn) \Big|. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2, il existe $c_5 < 1$ tel que, pour x suffisamment grand,

$$v(u^2) = v(x^{6/10}) \leqslant c_5 v(x).$$

En particulier, $v(u^2) \leqslant v(x) - 1$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 3. En tenant compte de la décroissance de $r \mapsto \sigma(r, \cdot)$, nous obtenons

$$S_1 \ll x (\log x)^4 \exp\Big(-\sigma(v(u^2), v(x) - 1) \Big) \ll x (\log x)^4 \exp\Big(-\sigma(c_5 v(x), v(x) - 1) \Big), \tag{53}$$

où nous rappelons que $v(y)$ désigne la valuation du nombre y en base A (cf. §2.2).

Pour traiter S_2, on pose $m = m_1 m_2$ de sorte que

$$S_2 = \sum_{m \leqslant u^2} \Big(\sum_{\substack{m_1 m_2 = m \\ m_1 \leqslant u \\ m_2 \leqslant u}} \mu(m_1) \Lambda(m_2) \Big) \sum_{mn \leqslant x} f(mn).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

De la majoration

$$\sum_{\substack{m_1m_2=m\\ m_1\leqslant u\\ m_2\leqslant u}}|\mu(m_1)|\,\Lambda(m_2)\leqslant\sum_{m_2|m}\Lambda(m_2)=\log m,$$

on déduit que

$$\begin{aligned}S_2&\ll\log x\sum_{m\leqslant u^2}\Big|\sum_{n\leqslant x/m}f(mn)\Big|\\&\ll\log x\big(S_2^{(1)}+S_2^{(2)}+O(u^3)\big)\end{aligned}\tag{54}$$

avec

$$\begin{aligned}S_2^{(1)}&=\sum_{m\leqslant u}\Big|\sum_{n\leqslant x/m}f(mn)\Big|\\S_2^{(2)}&=\sum_{u<m\leqslant u^2}\Big|\sum_{u<n\leqslant x/m}f(mn)\Big|.\end{aligned}$$

Le même calcul que celui réalisé pour S_1 aboutit à

$$S_2^{(1)}\ll x(\log x)^3\exp\Big(-\sigma(c_5v(x),v(x)-1)\Big).$$

La somme $S_2^{(2)}$ se traite comme une somme de type II. Au prix d'un facteur $\log x$, nous utilisons un lemme de séparation des variables (par exemple [18, Lemma 13.11]) afin d'enlever la condition $mn\leqslant x$. Puis nous découpons les intervalles $]u,u^2]$ et $]u,x/u]$ suivant des intervalles de la forme $]M/2,M]$ et $]N/2,N]$, ce qui fait apparaître un facteur $(\log x)^2$. Finalement, nous parvenons à

$$S_2^{(2)}\ll(\log x)^3\sup\Big|\sum_{M/2<m\leqslant M}\sum_{N/2<n\leqslant N}b_nc_mf(mn)\Big|$$

où le *supremum* est pris sur toutes les suites $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(c_m)_{m\geqslant 0}$ de nombres complexes de module $\leqslant 1$, tous les nombres entiers M et N tels que $MN\leqslant x$, $\min(M,N)\geqslant u$. D'après la proposition 4 appliquée avec $\xi=3/10$, il existe $c_6<1$ tel que

$$S_2^{(2)}\ll x(\log x)^{3+\frac12}\max(q_{v(x)},\log x)^{1/4}\sup_{\substack{MN\leqslant x\\ \min(M,N)\geqslant u}}\exp\Big(-\frac12\sigma(c_6v_{M,N},v_{M,N}-1)\Big),$$

où nous avons posé $v_{M,N}=v(\min(M,N))$. Comme

$$u=x^{3/10}\leqslant\min(M,N)\leqslant x^{1/2},$$

on a

$$v(x^{1/3})\leqslant v_{M,N}\leqslant v(x^{1/2})$$

et donc

$$S_2^{(2)}\ll x(\log x)^{7/2}\max(q_{v(x)},\log x)^{1/4}\exp\Big(-\frac12\inf_{v(x^{3/10})\leqslant\lambda\leqslant v(x^{1/2})}\sigma(c_6\lambda,\lambda-1)\Big).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Nous obtenons ainsi la majoration

$$S_2 \ll x(\log x)^{7/2} \max(q_{v(x)}, \log x)^{1/4} e^{-T(x)/2} + x^{9/10} \log x$$

avec

$$T(x) = \min\Big(\sigma\big(c_5 v(x), v(x)-1\big), \inf_{v(x^{3/10}) \leqslant \lambda \leqslant v(x^{1/2})} \sigma(c_6\lambda, \lambda - 1)\Big).$$

Enfin, on a

$$S_3 = (\log x) \sum_{u<m\leqslant x/u} \mu(m) \sum_{u<n\leqslant x/m} \Big(\frac{1}{\log x} \sum_{\substack{u<n_1\leqslant x\\ n_1n_2=n}} \Lambda(n_1)\Big) f(mn).$$

Nous remarquons que

$$\sum_{\substack{u<n_1\leqslant x\\ n_1n_2=n}} \Lambda(n_1) \leqslant \log n,$$

de sorte que l'on peut réécrire S_3 sous la forme

$$S_3 = (\log x) \sum_{u<m\leqslant x/u} c_m \sum_{u<n\leqslant x/m} b_n f(mn),$$

avec $|c_m| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$ pour tous entiers m et n. On peut alors appliquer le même traitement à S_3 qu'à $S_2^{(2)}$ et l'on obtient

$$S_3 \ll x(\log x)^{9/2} \max(q_{v(x)}, \log x)^{1/4} e^{-T(x)/2}.$$

Finalement,

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) f(n) \ll x(\log x)^{9/2} \max(q_{v(x)}, \log x)^{1/4} e^{-T(x)/2} + x^{9/10} \log x.$$

En tenant compte de la décroissance de $r \mapsto \sigma(r, \cdot)$, on a, en posant $c_0 = \max(c_5, c_6) < 1$,

$$T(x) \geqslant \inf_{v(x^{3/10}) \leqslant \lambda \leqslant v(x)} \sigma(c_0\lambda, \lambda - 1).$$

Cela conclut la preuve du théorème 1.

9. Transformée de Fourier de la fonction somme de chiffres

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(n) = \mathrm{e}(\alpha s_A(n))$. Cette section a pour but d'établir une majoration de la transformée de Fourier discrète décalée $|F_\lambda^{[k]}|$ associée à f dans une base de Cantor A quelconque. Il s'agit de reprendre et, le cas échéant, de préciser, plusieurs résultats obtenus dans [26]. Le premier lemme améliore le lemme 3 de [26]. Rappelons que la définition de φ_k est donnée en (28).

Lemme 11. Pour tout nombre entier $k \geqslant 1$ et tout nombre réel t tel que $\|t\| \leqslant \frac{1}{k}$, on a

$$\varphi_k(t) \leqslant k \, \exp\left(-\frac{(k^2-1)\pi^2 \|t\|^2}{6}\right).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Pour $k=1$, il y a égalité, donc on peut supposer $k \geqslant 2$. Comme φ_k est paire et périodique de période 1, on peut supposer que $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{k}$. La fonction f définie par $f(0)=1$ et

$$f(t)=\frac{\sin(\pi k t)}{k\sin(\pi t)}\exp\left((k^2-1)\frac{\pi^2 t^2}{6}\right)$$

est continue sur $[0,\frac{1}{k}]$. Pour montrer l'inégalité attendue, il suffit de montrer que, pour $t\in[0,\frac{1}{k}]$, on a $f(t)\leqslant f(0)=1$.

La fonction f est strictement positive et dérivable sur $]0,\frac{1}{k}[$ et, pour $t\in]0,\frac{1}{k}[$, on a

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\pi k\cot(\pi k t)-\pi\cot(\pi t)+(k^2-1)\frac{\pi^2 t}{3}.$$

Pour $|u|<1$, le développement de Taylor

$$\pi u\cot(\pi u)=1-\sum_{m=1}^{+\infty}|B_{2m}|\frac{(2\pi u)^{2m}}{(2m)!},$$

où $(B_n)_{n\geqslant 0}$ désigne la suite des nombres de Bernoulli (en particulier, $B_2=\frac{1}{6}$), permet d'écrire pour $t\in]0,\frac{1}{k}[$,

$$\begin{aligned} t\,\frac{f'(t)}{f(t)} &= -\sum_{m=1}^{+\infty}|B_{2m}|(k^{2m}-1)\frac{(2\pi t)^{2m}}{(2m)!}+(k^2-1)\frac{\pi^2 t^2}{3}\\ &= -\sum_{m=2}^{+\infty}|B_{2m}|(k^{2m}-1)\frac{(2\pi t)^{2m}}{(2m)!}\leqslant 0, \end{aligned}$$

donc f est décroissante sur $[0,\frac{1}{k}]$, d'où, pour tout $t\in[0,\frac{1}{k}]$, $f(t)\leqslant f(0)=1$. □

Lemme 12. Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$, et tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\varphi_k\left(\frac{t}{k}\right)\leqslant\varphi_k\left(\frac{\|t\|}{k}\right).$$

Démonstration. Voir [26, Lemme 4]. □

Lemme 13. Pour tout nombre entier $k\geqslant 2$, et tout $\delta\in\left[0,\frac{2}{3k}\right]$, on a

$$\max_{\|t\|\geqslant\delta}\varphi_k(t)=\varphi_k(\delta).$$

Démonstration. Voir [26, Lemme 5]. □

Lemme 14. Pour tous nombres entiers $k\geqslant 2$, $k'\geqslant 2$ et tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a

$$\max_{t\in\mathbb{R}}\varphi_k(\alpha-t)\,\varphi_{k'}(\alpha-kt)\leqslant kk'\,\exp\left(-\frac{\pi^2}{18}\|(k-1)\alpha\|^2\right).$$

Démonstration. En posant $t=\alpha-u$, on a

$$\max_{t\in\mathbb{R}}\varphi_k(\alpha-t)\,\varphi_{k'}(\alpha-kt)=\max_{u\in\mathbb{R}}\varphi_k(u)\,\varphi_{k'}(ku-(k-1)\alpha).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Posons $\delta := \frac{\|(k-1)\alpha\|}{k'+1} \leqslant \frac{1}{2k'}$. Nous distinguons deux cas:

— Si $\|ku-(k-1)\alpha\| \geqslant \delta$, le lemme 13 donne

$$\varphi_{k'}(ku-(k-1)\alpha) \leqslant \varphi_{k'}(\delta) = \varphi_{k'}\left(\frac{\|(k-1)\alpha\|}{k'+1}\right),$$

d'où, d'après le lemme 11,

$$\varphi_{k'}(ku-(k-1)\alpha) \leqslant k' \exp\left(-\frac{\pi^2(k'-1)}{6(k'+1)}\|(k-1)\alpha\|^2\right).$$

En observant que $(k'-1)/(k'+1) \geqslant 1/3$ et, en utilisant la majoration triviale $\varphi_k(u) \leqslant k$, on obtient finalement

$$\varphi_k(u)\,\varphi_{k'}(ku-(k-1)\alpha) \leqslant kk' \ \exp\left(-\frac{\pi^2}{18}\|(k-1)\alpha\|^2\right).$$

— Si $\|ku-(k-1)\alpha\| < \delta$, alors, d'après le lemme 12, on a $\varphi_k(u) = \varphi_k(ku/k) \leqslant \varphi_k(\|ku\|/k)$. Or,

$$\begin{aligned}\|ku\| = \|ku-(k-1)\alpha+(k-1)\alpha\| &\geqslant \|(k-1)\alpha\| - \|ku-(k-1)\alpha\| \\ &\geqslant \|(k-1)\alpha\| - \delta = (k'+1)\delta - \delta = k'\delta,\end{aligned}$$

donc, comme φ_k est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2k}\right]$,

$$\varphi_k(u) \leqslant \varphi_k(\|ku\|/k) \leqslant \varphi_k(k'\delta/k).$$

Or, d'après le lemme 11 et la définition de δ, on obtient

$$\varphi_k(k'\delta/k) \leqslant k \ \exp\left(-\frac{\pi^2(k^2-1)k'^2}{6\ k^2(k'+1)^2}\|(k-1)\alpha\|^2\right).$$

En observant que $(k^2-1)/k^2 \geqslant 3/4$, $k'^2/(k'+1)^2 \geqslant 4/9$ et en utilisant la majoration triviale $\varphi_{k'}(ku-(k-1)\alpha) \leqslant k'$, on obtient à nouveau

$$\varphi_k(u)\,\varphi_{k'}(ku-(k-1)\alpha) \leqslant kk' \ \exp\left(-\frac{\pi^2}{18}\|(k-1)\alpha\|^2\right). \qquad \square$$

Proposition 5. *On a pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$|F_\lambda^{[k]}(t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{36}\sum_{k\leqslant j\leqslant k+\lambda-1}\|(a_j-1)\alpha\|^2\right). \tag{55}$$

Démonstration. D'après le lemme 2, en regroupant les termes deux par deux, on a

$$|F_\lambda^{[k]}(t)| \leqslant \prod_{j\leqslant\lambda/2}\frac{1}{a_{2j+k}a_{2j+k+1}}\varphi_{a_{2j+k}}\left(\alpha-\frac{t}{q_{\lambda-2j}^{[2j+k]}}\right)\varphi_{a_{2j+k+1}}\left(\alpha-a_{2j+k}\frac{t}{q_{\lambda-2j}^{[2j+k]}}\right),$$

d'où l'on tire

$$|F_\lambda^{[k]}(t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{18}\sum_{0\leqslant j\leqslant(\lambda-1)/2}\|(a_{2j+k}-1)\alpha\|^2\right)$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

en utilisant pour chaque terme du produit la majoration fournie par le lemme 14. La majoration

$$|F_\lambda^{[k]}(t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{18}\sum_{0\leqslant j\leqslant(\lambda-2)/2}\|(a_{2j+k+1}-1)\alpha\|^2\right)$$

s'obtient de manière identique; en effectuant la moyenne géométrique de ces deux majorations, on obtient (55). □

10. Étude de la base factorielle

Rappelons que la base factorielle correspond à la suite $(a_j)_{j\geqslant 0}$ donnée par $a_j = j+2$ de sorte que $q_n = (n+1)!$ et que la valuation $v(x)$ d'un nombre réel $x \geqslant 2$ dans cette base vérifie

$$v(x) \sim \frac{\log x}{\log\log x} \quad (x \to +\infty).$$

Le théorème 1 appliqué à la base factorielle ainsi que l'estimation (cf. [11, theorem 1])

$$\tau(n!) = \exp\left(\frac{C_0\, n}{\log n} + O\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)\right),$$

avec

$$C_0 = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log k}{k(k-1)} \approx 1.25775,$$

fournissent l'énoncé suivant.

Proposition 6. *Soit σ une fonction satisfaisant à (21) et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{U}$ une fonction fortement multiplicative en base factorielle telle que $f \in \mathcal{F}_\sigma$. Il existe $c_7, d_7 > 0$ tels que, pour $x \geqslant 2$,*

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)f(n) \ll x\exp\left(d_7\frac{\log x}{(\log\log x)^2} - \frac{1}{2}\mathcal{K}_\sigma(x,c_7)\right) + x^{9/10}\log x, \tag{56}$$

où $\mathcal{K}_\sigma$ a été défini en (24).

Soient g une fonction fortement additive en base factorielle et $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la fonction vérifiant $\gamma(0) = 0$ et telle que $g = \sum_{j\geqslant 0}\gamma\circ\varepsilon_j$ (cf. définition 1). D'après le lemme 2, la transformée de Fourier décalée $F_\lambda^{[k]}$ associée à $f(n) = \mathrm{e}(\alpha g(n))$ définie par (22) vérifie

$$F_\lambda^{[k]}(t) = \prod_{a=k+2}^{k+\lambda+1}\Theta_a\left(\alpha, \frac{t}{q_{\lambda-a+k+2}^{[a-2]}}\right) \tag{57}$$

avec, pour $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\Theta_a(\alpha,t) = \frac{1}{a}\sum_{0\leqslant u<a}\mathrm{e}(\alpha\gamma(u) - ut). \tag{58}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Dans ce qui suit, nous évaluons pour diverses fonctions g le produit

$$\Theta_{2a}(\alpha,t)\,\Theta_{2a+1}(\alpha,2at).$$

Cette technique permet dans certains cas d'obtenir une estimation uniforme en t de $F_\lambda^{[k]}(t)$ et d'étudier *in fine* la répartition des valeurs de $\big(g(p)\big)_{p\in\mathcal{P}}$.

10.1. La fonction somme des chiffres en base factorielle, preuve des théorèmes 2, 3 et 4

D'après la proposition 5, la fonction $f(n)=\mathrm{e}(\alpha s_A(n))$ en base factorielle appartient à $\mathcal{F}_\sigma$ pour

$$\sigma(r,s)=\frac{\pi^2}{36}\sum_{r\leqslant j<s}\|(j+1)\alpha\|^2.$$

Pour tout $c<1$ et $x\in\mathbb{R}$ on a donc

$$\mathcal{K}_\sigma(x,c)=\frac{\pi^2}{36}\inf_{v(x^{3/10})\leqslant\lambda\leqslant v(x)}\sum_{c\lambda+1\leqslant j<\lambda}\|j\alpha\|^2. \tag{59}$$

Le théorème 2 est donc une conséquence directe de la proposition 6 et de (59). Pour $r,s\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, posons

$$\varrho(r,s,\alpha)=\sum_{r<j\leqslant s}\|j\alpha\|^2,$$

de sorte que

$$\sum_{c\lambda+1\leqslant j<\lambda}\|j\alpha\|^2=\varrho(\lceil c\lambda\rceil,\lceil\lambda\rceil-1,\alpha).$$

Proposition 7. *Soit $(k,b)\in\mathbb{N}^2$ avec $1\leqslant k<b$. Pour tous nombres entiers r et s tels que $s-r\geqslant 4b$, on a*

$$\varrho(r,s,k/b)\geqslant\frac{s-r}{27}. \tag{60}$$

Démonstration. Introduisons la notation

$$T(b)=\sum_{0\leqslant i<b}\left\|\frac{i}{b}\right\|^2,$$

et supposons pour l'instant $(k,b)=1$. Posons pour $r,s\in\mathbb{N}$, $r=Rb+R'$ et $s=Sb+S'$ avec $0\leqslant R'<b$ et $0\leqslant S'<b$. On a

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant s}\|jk/b\|^2=ST(b)+\sum_{0\leqslant i\leqslant S'}\left\|\frac{ki}{b}\right\|^2$$

et donc

$$\varrho(r,s,k/b)=\sum_{r<j\leqslant s}\|jk/b\|^2=(S-R)T(b)+\sum_{0\leqslant i\leqslant S'}\left\|\frac{ki}{b}\right\|^2-\sum_{0\leqslant i\leqslant R'}\left\|\frac{ki}{b}\right\|^2.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Il en découle

$$\sum_{r<j\leqslant s} \|jk/b\|^2 \geqslant (S-R-1)T(b).$$

On note que, pour $s-r \geqslant 4b$,

$$S-R-1 = \left\lfloor \frac{s}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{b} \right\rfloor - 1 \geqslant \frac{s-r}{b} - 2 \geqslant \frac{s-r}{2b}.$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire fournit

$$T(b) = \begin{cases} \frac{2}{b^2} V\left(\frac{b-1}{2}\right) & \text{si } b \text{ est impair,} \\ \frac{2}{b^2} V\left(\frac{b}{2}-1\right) + \frac{1}{4} & \text{si } b \text{ est pair,} \end{cases}$$

avec

$$V(m) = \sum_{1\leqslant v\leqslant m} v^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Pour $b \geqslant 3$ impair, il en résulte

$$T(b) = \frac{(b^2-1)b}{12b^2} = \frac{b}{12}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \geqslant \frac{2b}{27}.$$

Pour $b=2$ on a $T(b) = 1/4$ et, pour $b \geqslant 4$ pair, on a

$$T(b) = \frac{(b-2)b(b-1)}{12b^2} + \frac{1}{4} = \frac{b}{12b^2}(b^2 - 3b + 2 + 3b) \geqslant \frac{b}{12}.$$

On a donc $T(b) \geqslant 2b/27$ pour tout $b \geqslant 2$. En définitive, pour $s-r \geqslant 4b$, $(k,b)=1$, on a

$$\sum_{r<j\leqslant s} \left\| \frac{jk}{b} \right\|^2 \geqslant \frac{s-r}{27}. \tag{61}$$

Si $(k,b) > 1$, alors

$$\sum_{r<j\leqslant s} \|jk/b\|^2 = \sum_{r<j\leqslant s} \|jk'/b'\|^2$$

avec $k' = k/(k,b)$ et $b' = b/(k,b)$. On note que $(k',b') = 1$ et $b' \geqslant 2$ puisque $b \nmid k$ par hypothèse. Si $s-r \geqslant 4b$, alors $s-r \geqslant 4b'$ et donc, d'après (61), $\sum_{r<j\leqslant s} \left\| \frac{jk}{b} \right\|^2 \geqslant \frac{s-r}{27}$. □

Démonstration du théorème 3. En utilisant la relation (1), on a pour $\ell \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} R(x) := \Bigg| \sum_{\substack{n\leqslant x \\ s_A(n)\equiv \ell \bmod b}} \Lambda(n) - \frac{x}{b} \Bigg| &= \left| \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b-1} \mathrm{e}\left(-\frac{k\ell}{b}\right) \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\left(\frac{ks_A(n)}{b}\right) \right| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant k<b} \left| \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\, \mathrm{e}\left(\frac{ks_A(n)}{b}\right) \right|. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Appliquons alors la majoration (56). D'après (60) et l'inégalité (12), pour tout $c>0$ et $x \geqslant x_0(b,c)$, on a

$$\inf_{v(x^{3/10}) \leqslant \lambda \leqslant v(x)} \varrho(\lceil c\lambda \rceil, \lceil \lambda \rceil - 1, \alpha) \gg \frac{\log x}{\log\log x}.$$

Nous obtenons donc l'existence de $c_4 > 0$ tel que, pour x suffisamment grand,

$$R(x) \ll x \exp\Big(-c_4 \frac{\log x}{\log\log x}\Big).$$

Il s'ensuit

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ s_A(n) \equiv \ell \bmod b}} \Lambda(n) = \frac{x}{b} + O\Big(x \exp\Big(-c_4 \frac{\log x}{\log\log x}\Big)\Big).$$

Le théorème 3 en découle à l'aide d'une intégration par parties (*cf.* par exemple, [27, lemme 11]).

Proposition 8. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tous nombres entiers r et s tels que $1 \leqslant r \leqslant s$, $r \to \infty$,*

$$\varrho(r,s,\alpha) = \frac{s-r}{12} + o_\alpha(r).$$

Démonstration. Comme α est irrationnel, la suite $(j\alpha)_{j \geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1. D'après un résultat classique sur les suites équiréparties modulo 1 (*cf.* par exemple [21, theorem 1.1]),

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \|j\alpha\|^2 = r\int_0^1 \|t\|^2\,dt + o_\alpha(r) = \frac{r}{12} + o_\alpha(r),$$

lorsque r tend vers l'infini, ce qui fournit par différence l'estimation attendue. $\square$

Démonstration du théorème 4. D'après le critère de Weyl (cf., par exemple, [21, theorem 2.1]), il suffit de prouver que, pour tout nombre irrationnel α,

$$\sum_{p \leqslant x} \mathrm{e}\big(\alpha s_A(p)\big) = o\big(\pi(x)\big) \quad (x \to +\infty).$$

Une intégration par parties montre qu'il suffit pour cela d'établir la relation

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\,\mathrm{e}\big(\alpha s_A(n)\big) = o\big(x\big) \quad (x \to +\infty)$$

pour tout nombre irrationnel α. Or, comme $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d'après (56) et la proposition 8, il existe $c_8 = c_8(\alpha) > 0$ tel que pour x suffisamment grand,

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\,\mathrm{e}\big(\alpha s_A(n)\big) \ll x \exp\Big(-c_8 \frac{\log x}{\log\log x}\Big).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

10.2. Décompte des chiffres impairs

Dans tout ce paragraphe, on suppose que

$$\forall k \geqslant 1, \gamma(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \end{cases}$$

de sorte que la fonction fortement A-additive g associée à γ compte le nombre de chiffres impairs d'un nombre entier écrit en base factorielle.

Nous étudions séparément les fonctions Θ_{2a} et Θ_{2a+1} définies en (58) pour montrer que leur produit est toujours petit.

Lemme 15. Pour tout nombre entier $a \geqslant 1$ et tout $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| = \frac{\varphi_a(2t)}{a} |\cos \pi(\alpha - t)| \tag{62}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \Theta_{2a}(\alpha,t) &= \frac{1}{2a} \sum_{0 \leqslant u < 2a} \mathrm{e}(\alpha\gamma(u) - ut) \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{0 \leqslant k < a} \mathrm{e}(-2kt) + \frac{\mathrm{e}(\alpha)}{2a} \sum_{0 \leqslant k < a} \mathrm{e}(-(2k+1)t) \\ &= \frac{1 + \mathrm{e}(\alpha - t)}{2a} \sum_{0 \leqslant k < a} \mathrm{e}(-2kt), \end{aligned}$$

donc, d'après (28) et en remarquant que $|1 + \mathrm{e}(\alpha - t)| = 2|\cos \pi(\alpha - t)|$, on obtient (62). □

Lemme 16. Pour tout nombre entier $a \geqslant 2$ et tout $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{18} \|2\alpha\|^2\right). \tag{63}$$

Démonstration. En remarquant que $\varphi_2(\alpha - t) = 2|\cos \pi(\alpha - t)|$ et en posant $t = t' - \alpha$, on obtient

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| = \frac{\varphi_2(2\alpha - t')\varphi_a(2\alpha - 2t')}{2a}$$

et le résultat découle du lemme 14. □

Lemme 17. Pour tout nombre entier $a \geqslant 1$ et tout $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\alpha\| \leqslant \frac{2}{5}$, on a

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{72} \|\alpha\|^2\right). \tag{64}$$

Démonstration. Si $\|\alpha\| \leqslant \frac{1}{4}$, alors $\|2\alpha\| = 2\|\alpha\|$ donc, d'après (63), on a

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{2\pi^2}{9} \|\alpha\|^2\right).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Si $\frac{1}{4} < \|\alpha\| \leqslant \frac{2}{5}$, alors $\left\|\frac{1}{2} - \alpha\right\| \leqslant \frac{1}{4}$, donc

$$\|2\alpha\| = \left\|2\left(\tfrac{1}{2} - \alpha\right)\right\| = 2\left\|\tfrac{1}{2} - \alpha\right\| \geqslant 2\left(\tfrac{1}{2} - \|\alpha\|\right) \geqslant \tfrac{1}{5} \geqslant \tfrac{1}{2}\|\alpha\|$$

et, d'après (63),

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{72}\|\alpha\|^2\right),$$

ce qui établit (64). □

Lemme 18. Pour tout nombre entier $a \geqslant 1$ et tout $(\alpha,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\Theta_{2a+1}(\alpha,t) = \mathrm{e}(-at)\frac{\sin 2\pi(a+1)t + \mathrm{e}(\alpha)\sin 2\pi at}{(2a+1)\sin 2\pi t}, \tag{65}$$

$$\Theta_{2a+1}(\alpha,t) = \mathrm{e}(-at)\frac{\cos\pi(2a+1)t}{(2a+1)\cos\pi t} + \mathrm{e}(-at)\frac{(1+\mathrm{e}(\alpha))\sin 2\pi at}{(2a+1)\sin 2\pi t}. \tag{66}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\Theta_{2a+1}(\alpha,t) &= \frac{1}{2a+1}\sum_{0\leqslant u<2a+1} \mathrm{e}(\alpha\gamma(u) - ut) \\
&= \frac{1}{2a+1}\sum_{0\leqslant k\leqslant a} \mathrm{e}(-2kt) + \frac{\mathrm{e}(\alpha)}{2a+1}\sum_{0\leqslant k<a} \mathrm{e}(-(2k+1)t) \\
&= \frac{1}{2a+1}\sum_{0\leqslant k\leqslant a} \mathrm{e}(-2kt) + \frac{\mathrm{e}(\alpha-t)}{2a+1}\sum_{0\leqslant k<a} \mathrm{e}(-2kt) \\
&= \frac{1}{2a+1}\cdot\frac{1-\mathrm{e}(-2(a+1)t)}{1-\mathrm{e}(-2t)} + \frac{\mathrm{e}(\alpha-t)}{2a+1}\cdot\frac{1-\mathrm{e}(-2at)}{1-\mathrm{e}(-2t)} \\
&= \frac{\mathrm{e}(-at)}{2a+1}\cdot\frac{\sin 2\pi(a+1)t}{\sin 2\pi t} + \frac{\mathrm{e}(\alpha-t)}{2a+1}\cdot\frac{\mathrm{e}((1-a)t)\sin 2\pi at}{\sin 2\pi t},
\end{aligned}$$

ce qui donne (65). On écrit alors

$$\Theta_{2a+1}(\alpha,t) = \mathrm{e}(-at)\frac{\sin 2\pi(a+1)t - \sin 2\pi at}{(2a+1)\sin 2\pi t} + \mathrm{e}(-at)\frac{(1+\mathrm{e}(\alpha))\sin 2\pi at}{(2a+1)\sin 2\pi t},$$

et, à l'aide des formules

$$\sin(\pi(2a+1)t + \pi t) - \sin(\pi(2a+1)t - \pi t) = 2\cos\pi(2a+1)t\sin\pi t$$

et $\sin 2\pi t = 2\sin\pi t\cos\pi t$, on obtient (66). □

Lemme 19. Pour tout nombre entier $a \geqslant 1$ et tout $(\alpha,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|t\| \leqslant \frac{1}{3}$, on a

$$|\Theta_{2a+1}(\alpha,t)| \leqslant \frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi\|\alpha\|}{2}\right)^2 \leqslant \frac{4}{3}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\|\alpha\|^2\right). \tag{67}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

En particulier, pour $\|t\| \leqslant \frac{1}{3}$ et $\|\alpha\| \geqslant \frac{2}{5}$, on a

$$|\Theta_{2a+1}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{2}{3}\|\alpha\|^2\right). \tag{68}$$

Démonstration. Si $\|t\| \leqslant \frac{1}{3}$, alors $|\cos\pi t| \geqslant \frac{1}{2}$ donc, d'après (66) et (28), on a

$$|\Theta_{2a+1}(\alpha,t)| \leqslant \frac{|\cos\pi t|^{-1}}{2a+1} + \frac{2|\cos\pi\alpha|}{2a+1}\varphi_a(2t) \leqslant \frac{2+2a|\cos\pi\alpha|}{2a+1} = |\cos\pi\alpha| + \frac{2-|\cos\pi\alpha|}{2a+1}$$

et le membre de droite, qui décroît avec a, est maximal pour $a=1$, d'où

$$|\Theta_{2a+1}(\alpha,t)| \leqslant \frac{2+2|\cos\pi\alpha|}{3} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi\|\alpha\|}{2}\right)^2,$$

ce qui établit l'inégalité de gauche de (67). Celle de droite est donnée par le lemme 11, appliqué avec $k=2$.

Si $\|t\| \leqslant \frac{1}{3}$ et $\|\alpha\| \geqslant \frac{2}{5}$, alors

$$\frac{\pi^2}{4}\|\alpha\|^2 - \ln\frac{4}{3} \geqslant \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{25}{4}\ln\frac{4}{3}\right)\|\alpha\|^2 \geqslant \frac{2}{3}\|\alpha\|^2,$$

ce qui permet de déduire (68) de (67). $\square$

Lemme 20. Pour tout nombre entier $a \geqslant 2$ et tout $(\alpha,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)\,\Theta_{2a+1}(\alpha,2at)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{72}\|\alpha\|^2\right). \tag{69}$$

Démonstration. Si $\|\alpha\| \leqslant \frac{2}{5}$, on a, d'après (64),

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)\,\Theta_{2a+1}(\alpha,2at)| \leqslant |\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{72}\|\alpha\|^2\right).$$

On suppose dorénavant que $\|\alpha\| > \frac{2}{5}$.

Si $\|2t\| \geqslant \frac{1}{3a}$, alors, d'après (62), le lemme 13 puis le lemme 11 (on rappelle que $a \geqslant 2$), on a

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \frac{1}{a}\varphi_a\left(\frac{1}{3a}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{(a^2-1)\pi^2}{54a^2}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{72}\right),$$

et, comme $4\|\alpha\|^2 \leqslant 1$, on obtient

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)\,\Theta_{2a+1}(\alpha,2at)| \leqslant |\Theta_{2a}(\alpha,t)| \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{18}\|\alpha\|^2\right).$$

Si $\|2t\| < \frac{1}{3a}$, alors $\|2at\| < \frac{1}{3}$, et, comme $\|\alpha\| > \frac{2}{5}$, par (68), on a

$$|\Theta_{2a}(\alpha,t)\,\Theta_{2a+1}(\alpha,2at)| \leqslant |\Theta_{2a+1}(\alpha,2at)| \leqslant \exp\left(-\frac{2}{3}\|\alpha\|^2\right),$$

ce qui établit (69). $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Nous pouvons déduire de (69) et de la représentation (57) qu'il existe $C > 0$ et $D \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f(n) = \mathrm{e}(\alpha g(n))$ appartienne à $\mathcal{F}_\sigma$, avec $\sigma(r,s,\alpha) = C(r-s)\|\alpha\|^2 + D$. Le théorème 1 permet ainsi d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 9. *Soit g la fonction donnant le nombre de chiffres impairs d'un nombre entier dans sa décomposition en base factorielle. Il existe $c_9 > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\,\mathrm{e}\big(\alpha g(n)\big) \ll x \exp\Big(-c_9 \|\alpha\|^2 \frac{\log x}{\log\log x}\Big).$$

10.3. Décompte du nombre de 1 en base factorielle

Dans tout ce paragraphe, on suppose que

$$\forall k \geqslant 1, \gamma(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que g est la fonction qui donne le nombre de chiffres 1 apparaissant dans l'écriture d'un nombre entier en base factorielle.

Lemme 21. Pour tout nombre entier $a \geqslant 5$ et tout $(\alpha,t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\Theta_a(\alpha,t)\Theta_{a+1}(\alpha,at)| \leqslant \exp\left(-\frac{2(a-1)}{a^2}\sin^2(\pi\alpha) + \frac{\pi}{a^2}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{8(a-1)}{a^2}\|\alpha\|^2 + \frac{\pi}{a^2}\right). \tag{70}$$

Démonstration. L'inégalité de droite de (70) s'obtient en observant que $|\sin\pi\alpha| \geqslant 2\|\alpha\|$. D'après (58), comme $\gamma(0) = 0$, on a

$$\Theta_a(\alpha,t) = \frac{\mathrm{e}(\alpha - t) + 1}{a} + \frac{1}{a}\sum_{2 \leqslant u < a} \mathrm{e}(-ut)$$

et, en effectuant une somme géométrique, on a, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$|\Theta_a(\alpha,t)| \leqslant \frac{2}{a} + \frac{1}{a|\sin\pi t|} = \frac{2}{a} + \frac{1}{a\sin(\pi\|t\|)}.$$

Par périodicité, on peut supposer $-\frac{1}{2} < t \leqslant \frac{1}{2}$. En remplaçant a par $a+1$, on obtient pour $\|at\| \geqslant \frac{1}{a+1}$:

$$|\Theta_{a+1}(\alpha,at)| \leqslant \frac{2}{a+1} + \frac{1}{(a+1)\sin(\pi\|at\|)} \leqslant \frac{2}{a+1} + \frac{1}{(a+1)\sin\frac{\pi}{a+1}},$$

et, pour $a \geqslant 5$, par concavité du sinus, on a

$$\sin\frac{\pi}{a+1} \geqslant \frac{\pi}{a+1}\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{a+1},$$

donc

$$|\Theta_{a+1}(\alpha,at)| \leqslant \frac{2}{a+1} + \frac{1}{3} \leqslant \frac{2}{3}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

En étudiant les variations de la fonction g définie pour $x>0$ par

$$g(x)=1-\frac{2(x-1)}{x^2}+\frac{\pi}{x^2},$$

on constate que, pour tout $x>0$, $g(x)\geqslant g(2+\pi)>\frac{4}{5}$, d'où, pour $a\geqslant 5$,

$$\begin{aligned}|\Theta_{a+1}(\alpha,at)|&\leqslant\frac{2}{3}\leqslant g(2+\pi)\leqslant g(a)\\&\leqslant\exp\left(-\frac{2(a-1)}{a^2}+\frac{\pi}{a^2}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{2(a-1)}{a^2}\sin^2(\pi\alpha)+\frac{\pi}{a^2}\right),\end{aligned}$$

ce qui établit (70) pour $a\geqslant 5$ et $\|at\|\geqslant\frac{1}{a+1}$.

Si $\|at\|<\frac{1}{a+1}$, écrivons $at=k+\frac{\eta}{a+1}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{1}{2}<\eta<\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2}<t\leqslant\frac{1}{2}$, on a

$$-a<2at=2k+\frac{2\eta}{a+1}\leqslant a,$$

d'où

$$-a=\left\lceil -a-\frac{1}{a+1}\right\rceil\leqslant 2k\leqslant\left\lfloor a+\frac{1}{a+1}\right\rfloor=a,$$

ce qui implique $-\frac{a}{2}\leqslant k\leqslant\frac{a}{2}$. Si $k\neq 0$, alors

$$\|t\|=\left\|\frac{k}{a}+\frac{\eta}{a(a+1)}\right\|\geqslant\left\|\frac{k}{a}\right\|-\frac{|\eta|}{a(a+1)}\geqslant\frac{1}{a}-\frac{1}{2a(a+1)}=\frac{2a+1}{2a(a+1)}\geqslant\frac{1}{a+1},$$

donc

$$|\Theta_a(\alpha,t)|\leqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{a\sin(\pi\|t\|)}\leqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{a\sin\frac{\pi}{a+1}}\leqslant\frac{2}{a}+\frac{a+1}{3a}=\frac{7}{3a}+\frac{1}{3},$$

d'où, pour $a\geqslant 5$,

$$|\Theta_a(\alpha,t)|\leqslant\frac{4}{5}<g(2+\pi)\leqslant g(a),$$

ce qui établit (70) dans le cas où $k\neq 0$.

Il nous reste à étudier le cas où $k=0$, c'est-à-dire $t=\frac{\eta}{a(a+1)}$ avec $-\frac{1}{2}<\eta<\frac{1}{2}$. On a alors

$$\begin{aligned}\Theta_a(\alpha,t)&=\frac{\mathrm{e}(\alpha-t)+1}{a}+\frac{\mathrm{e}(-2t)}{a}\sum_{0\leqslant u<a-2}\mathrm{e}(-ut)=\frac{\mathrm{e}(\alpha-t)+1}{a}+\frac{\mathrm{e}(-2t)}{a}\frac{1-\mathrm{e}(-(a-2)t)}{1-\mathrm{e}(-t)},\\&=\frac{\mathrm{e}(\alpha-t)+1}{a}+\frac{\mathrm{e}(-2t)}{a}\frac{\mathrm{e}(-(a-2)t/2)}{\mathrm{e}(-t/2)}\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t},\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{e}\left(\frac{t}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\Theta_a(\alpha,t)=\frac{2\cos\pi(\alpha-t)}{a}+\frac{1}{a}\mathrm{e}\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{at}{2}\right)\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Ainsi,

$$a^2\,|\Theta_a(\alpha,t)|^2 = 4\cos^2\pi(\alpha-t) + \frac{\sin^2\pi(a-2)t}{\sin^2\pi t} + 4\cos\pi(\alpha-t)\cos\pi\,(\alpha+at)\,\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t},$$

donc

$$\begin{aligned} a^2\,|\Theta_a(\alpha,t)|^2 &= 4 + \frac{\sin^2\pi(a-2)t}{\sin^2\pi t} + 4\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t} \\ &\quad - 4\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t}\,(1-\cos\pi(\alpha-t)\cos\pi\,(\alpha+at)) - 4\sin^2\pi(\alpha-t). \end{aligned}$$

Comme $\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t} \leqslant \left|\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t}\right| \leqslant a-2$, on a

$$4 + \frac{\sin^2\pi(a-2)t}{\sin^2\pi t} + 4\frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t} \leqslant 4 + (a-2)^2 + 4(a-2) = a^2.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$(a-2)\left(1 - \frac{\pi^2}{6}(a-2)^2t^2\right) = \frac{\pi(a-2)\,|t| - \frac{\pi^3}{6}(a-2)^3\,|t|^3}{\pi\,|t|} \leqslant \frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t} \leqslant a-2,$$

et, comme $|t| \leqslant (2a(a+1))^{-1}$,

$$(a-2)(1-A) \leqslant \frac{\sin\pi(a-2)t}{\sin\pi t} \leqslant a-2, \quad A = \frac{\pi^2}{24}\,\frac{(a-2)^2}{a^2(a+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} a^2\,|\Theta_a(\alpha,t)|^2 &\leqslant a^2 - 4(a-2)(1-A)\,(1-\cos\pi(\alpha-t)\cos\pi\,(\alpha+at)) - 4\sin^2\pi(\alpha-t), \\ &\leqslant a^2 - 4(a-2)\,(1-\cos\pi(\alpha-t)\cos\pi\,(\alpha+at)) + 8(a-2)A - 4\sin^2\pi(\alpha-t). \end{aligned}$$

Comme $|t| \leqslant (2a(a+1))^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} &\left|\cos\pi(\alpha-t)\cos\pi\,(\alpha+at) - \cos^2\pi\alpha\right| \\ &= \frac{1}{2}\,|(\cos\pi(a+1)t - 1) + (\cos\pi\,(2\alpha+(a-1)t) - \cos\pi\,(2\alpha))| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\pi(a+1)\,|t| + \frac{1}{2}\pi(a-1)\,|t| = \pi a\,|t| \leqslant \frac{\pi}{2(a+1)} \end{aligned}$$

et

$$\left|\sin^2\pi(\alpha-t) - \sin^2\pi\alpha\right| = \frac{1}{2}\,|\cos 2\pi\alpha - \cos 2\pi(\alpha-t)| \leqslant \frac{1}{2}2\pi\,|t| \leqslant \frac{\pi}{2a(a+1)},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} &a^2\,|\Theta_a(\alpha,t)|^2 \leqslant a^2 - 4(a-2)\left(1-\cos^2\pi\alpha\right) + \frac{4(a-2)\pi}{2(a+1)} + 8(a-2)A - 4\sin^2\pi\alpha + \frac{4\pi}{2a(a+1)} \\ &= a^2 - 4(a-1)\sin^2\pi\alpha + 2\pi - \frac{6\pi}{a+1} + \frac{8\pi^2}{24}\,\frac{(a-2)^3}{a^2(a+1)^2} + \frac{2\pi}{a(a+1)}, \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

et comme

$$\frac{8\pi^2}{24}\frac{(a-2)^3}{a^2(a+1)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3(a+1)} \leqslant \frac{4\pi}{a+1},$$

on obtient

$$a^2\left|\Theta_a(\alpha,t)\right|^2 \leqslant a^2 - 4(a-1)\sin^2\pi\alpha + 2\pi.$$

Cela conduit à

$$\left|\Theta_a(\alpha,t)\right|^2 \leqslant 1 - \frac{4(a-1)}{a^2}\sin^2\pi\alpha + \frac{2\pi}{a^2} \leqslant \exp\left(-\frac{4(a-1)}{a^2}\sin^2(\pi\alpha) + \frac{2\pi}{a^2}\right)$$

et achève la démonstration de (70) en prenant la racine carrée. □

Il découle du lemme 21 que, pour la fonction g qui compte le nombre de chiffres 1 en base factorielle, la transformée de Fourier (définie par (21)) de la fonction $f(n) = \mathrm{e}(\alpha g(n))$ vérifie

$$F_\lambda(t) = \frac{1}{q_\lambda}\sum_{u<q_\lambda} \mathrm{e}(\alpha g(u))\,\mathrm{e}\left(-\frac{tu}{q_\lambda}\right) \ll \exp\left(-8\left\|\alpha\right\|^2\log\lambda\right) = \lambda^{-8\|\alpha\|^2}. \tag{71}$$

C'est suffisant pour obtenir le résultat suivant:

Proposition 10. *Soit g la fonction qui donne le nombre d'occurrences du chiffre 1 dans la décomposition d'un nombre entier en base factorielle. Uniformément pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $x \geqslant 2$, on a*

$$\sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}(\alpha g(n) + \beta n) \ll x\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right)^{-8\|\alpha\|^2}. \tag{72}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{N}$ avec $x \geqslant q_2 = 3! = 6$. Posons $\lambda_x = v(x) - 1$ de sorte que $q_{\lambda_x} \leqslant x < q_{\lambda_x+1}$ et $\lambda_x \geqslant 2$. Posons également $f(n) = \mathrm{e}(\alpha g(n))$. Par (30), on a

$$\left|\sum_{0\leqslant n<x} \mathrm{e}(\alpha g(n) + \beta n)\right| \leqslant \sum_{\lambda\leqslant\lambda_x} x_\lambda \left|\sum_{0\leqslant u<q_\lambda} f(u)\,\mathrm{e}(\beta u)\right| = \sum_{\lambda\leqslant\lambda_x} x_\lambda q_\lambda \left|F_\lambda(-\beta q_\lambda)\right|$$

et, comme $x_\lambda \in \{0,\ldots,a_\lambda - 1\}$, on a

$$\sum_{\lambda<\lambda_x-2} x_\lambda q_\lambda \leqslant \sum_{\lambda<\lambda_x-2} (a_\lambda - 1)\,q_\lambda = \sum_{\lambda<\lambda_x-2} (q_{\lambda+1} - q_\lambda) \leqslant q_{\lambda_x-2}.$$

D'après (71), on en déduit que

$$\left|\sum_{0\leqslant n<x} \mathrm{e}(\alpha g(n) + \beta n)\right| \ll x_{\lambda_x} q_{\lambda_x} \lambda_x^{-8\|\alpha\|^2} + x_{\lambda_x-1} q_{\lambda_x-1} (\lambda_x - 1)^{-8\|\alpha\|^2} + x_{\lambda_x-2} q_{\lambda_x-2} + q_{\lambda_x-2},$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

d'où, comme $x_{\lambda_x-2}q_{\lambda_x-2}+q_{\lambda_x-2}\leqslant a_{\lambda_x-2}q_{\lambda_x-2}\leqslant q_{\lambda_x-1}$,

$$\left|\sum_{0\leqslant n<x}\mathrm{e}(\alpha g(n)+\beta n)\right|\ll \lambda_x^{-8\|\alpha\|^2}\left(x_{\lambda_x}q_{\lambda_x}+x_{\lambda_x-1}q_{\lambda_x-1}(1-\lambda_x^{-1})^{8\|\alpha\|^2}+\lambda_x^{8\|\alpha\|^2}q_{\lambda_x-1}\right).$$

En notant que $\lambda_x\geqslant 2$ et $\|\alpha\|\leqslant 1/2$, on a $(1-\lambda_x^{-1})^{-8\|\alpha\|^2}\leqslant 2^{8\|\alpha\|^2}\leqslant 4$, donc

$$\left|\sum_{0\leqslant n<x}\mathrm{e}(\alpha g(n)+\beta n)\right|\ll \lambda_x^{-8\|\alpha\|^2}\left(x_{\lambda_x}q_{\lambda_x}+2x_{\lambda_x-1}q_{\lambda_x-1}+\lambda_x q_{\lambda_x-1}\right),$$

et, comme $a_{\lambda_x-1}=\lambda_x+1$, on obtient

$$\left|\sum_{0\leqslant n<x}\mathrm{e}(\alpha g(n)+\beta n)\right|\ll \lambda_x^{-8\|\alpha\|^2}\left(x_{\lambda_x}q_{\lambda_x}+3\left(a_{\lambda_x-1}-1\right)q_{\lambda_x-1}\right)\ll \lambda_x^{-8\|\alpha\|^2}\left(x_{\lambda_x}+3\right)q_{\lambda_x},$$

puis, en notant que $x_{\lambda_x}\geqslant 1$, il vient finalement

$$\left|\sum_{0\leqslant n<x}\mathrm{e}(\alpha g(n)+\beta n)\right|\ll \lambda_x^{-8\|\alpha\|^2}x_{\lambda_x}q_{\lambda_x}\ll x\lambda_x^{-8\|\alpha\|^2},$$

et ce, uniformément pour $\beta\in\mathbb{R}$. Puisque $\lambda_x=v(x)-1$ et que $v(x)\sim\log x/(\log\log x)$ pour $x\to+\infty$, on obtient bien le résultat voulu. □

En revanche, la majoration fournie par le lemme 21 combinée à la proposition 6 est insuffisante pour obtenir un théorème des nombres premiers pour la fonction g qui compte le nombre de chiffres 1 en base factorielle. En effet, si l'on note $F_\lambda^{[k]}(t)$ la transformée de Fourier décalée associée à $f(n)=\mathrm{e}\left(\alpha g(n)\right)$, la proposition suivante montre que pour tout $c>0$, tout $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|F_\lambda^{[\lfloor c\lambda\rfloor]}(t)|\neq 0.$$

En conséquence, la condition (26) n'est pas satisfaite. La méthode développée dans cet article échoue donc pour établir un théorème des nombres premiers pour cette fonction f.

Proposition 11. *Soit $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ la fonction qui en base factorielle donne le nombre d'apparitions du chiffre 1. Pour tout $k\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 20$, $\alpha\in\mathbb{R}$, la transformée de Fourier décalée associée par (22) à $f(n)=\mathrm{e}\left(\alpha g(n)\right)$ vérifie*

$$|F_\lambda^{[k]}(0)|\geqslant\exp\left(-4\log(2)\pi^2\|\alpha\|^2\log\left(\frac{k+\lambda+1}{k+2}\right)\right).\tag{73}$$

Démonstration.

$$\Theta_a(\alpha,t)=\frac{1}{a}\sum_{0\leqslant u<a}\mathrm{e}(\alpha\gamma(u)-ut)=\frac{\mathrm{e}(\alpha-t)}{a}+\frac{1}{a}\sum_{\substack{0\leqslant u<a\\ u\neq 1}}\mathrm{e}(-ut),$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

d'où, en particulier,

$$\Theta_a(\alpha,0) = \frac{\mathrm{e}(\alpha)+(a-1)}{a}.$$

Comme

$$|\Theta_a(\alpha,0)|^2 = \frac{1+(a-1)^2+2(a-1)\cos(2\pi\alpha)}{a^2} = \frac{a^2-4(a-1)\sin^2(\pi\alpha)}{a^2},$$

il vient

$$|\Theta_a(\alpha,0)|^2 \geqslant 1-4\pi^2\frac{a-1}{a^2}\,\|\alpha\|^2.$$

Pour tout $x\in[0,1/2]$, $1-x\geqslant e^{-2\log(2)x}$. Pour $a\geqslant 20$,

$$4\pi^2\frac{a-1}{a^2}\,\|\alpha\|^2 \leqslant 1/2,$$

donc, d'après (57),

$$\begin{aligned}|F_\lambda^{[k]}(0)| &= \Big|\prod_{a=k+2}^{k+\lambda+1}\Theta_a(\alpha,0)\Big|\\ &\gg \exp\Big(-4\log(2)\pi^2\,\|\alpha\|^2\sum_{a=k+2}^{k+\lambda+1}\frac{1}{a}\Big)\\ &\gg \exp\Big(-4\log(2)\,\|\alpha\|^2\,\pi^2\log\Big(\frac{k+\lambda+1}{k+2}\Big)\Big).\end{aligned}$$

□

Remarque 3. Nous signalons que des analogues du lemme 21 et des propositions 10 et 11 peuvent être obtenus pour la fonction qui compte le nombre de chiffres non nuls en base factorielle.

11. Le cas des bases A bornées

Lorsque la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, des complications de nature arithmétique peuvent survenir lors de l'étude de la répartition des valeurs prises par une fonction fortement additive. Typiquement, en base constante q, la relation $s_q(n)\equiv n \bmod q-1$ induit des biais dans la répartition dans les progressions arithmétiques de la suite $\big(s_q(p)\big)_{p\in\mathcal{P}}$ (*cf.* [27, théorème 3]). Sur le même principe, on peut construire des exemples de bases bornées non constantes dans lesquelles la suite $\big(s_A(p)\big)_{p\in\mathcal{P}}$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques, sans pour autant que l'approche par la transformée de Fourier soit concluante.

Commençons par énoncer une version du théorème 1 dans le cas d'une base bornée. Pour évaluer la quantité $\tau(q_{\lfloor v(x)\rfloor})$ en base bornée, nous employons les inégalités classiques suivantes (où $P^-(n)$ désigne le plus petit facteur premier d'un nombre entier $n\geqslant 2$).

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Lemme 22. Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\tau(n) \leqslant \left(1+\frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}, \quad \Omega(n) \leqslant \frac{\ln n}{\ln P^-(n)} \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2}. \tag{74}$$

Démonstration. Pour $n \geqslant 2$,

$$n = \prod_{p\,|\,n} p^{v_p(n)} \geqslant \prod_{p\,|\,n} P^-(n)^{v_p(n)} = P^-(n)^{\Omega(n)} \geqslant 2^{\Omega(n)},$$

ce qui établit la majoration de $\Omega(n)$. L'inégalité arithmético-géométrique permet d'écrire

$$\tau(n) = \prod_{p\,|\,n} \tau\left(p^{v_p(n)}\right) = \prod_{p\,|\,n}(1+v_p(n)) \leqslant \left(\frac{1}{\omega(n)}\sum_{p\,|\,n}(1+v_p(n))\right)^{\omega(n)} \leqslant \left(1+\frac{\Omega(n)}{\omega(n)}\right)^{\omega(n)}.$$

□

Il découle du lemme 22 que si $A=(a_j)_{j\geqslant 0}$ est bornée, il existe $C>0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\omega(q_\lambda) \ll 1, \quad \Omega(q_\lambda) \ll \lambda \text{ et } \tau(q_\lambda) \ll \lambda^C.$$

De plus, d'après (8), $v(x) \ll \log x$. On déduit donc du théorème 1 le résultat suivant:

Proposition 12. *Soit A une base bornée. Alors, il existe des nombres réels $0 \leqslant c_{10} < 1$ et $d_{10} > 0$ tels que pour σ satisfaisant à (21), $f \in \mathcal{F}_\sigma$ et $x \geqslant 2$,*

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) f(n) \ll x(\log x)^{d_{10}} \exp\Big(-\frac{1}{4}\inf_{v(x^{3/10})\leqslant\lambda\leqslant v(x)} \sigma(c_{10}\lambda,\lambda-1)\Big). \tag{75}$$

Appliquons ce résultat à la fonction $f(n) = \mathrm{e}\big(\alpha s_A(n)\big)$. D'après (55), on a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)\,\mathrm{e}(\alpha s_A(n)) \ll x(\log x)^{d_{10}} \exp\Big(-\frac{\pi^2}{144}\inf_{v(x^{3/10})\leqslant\lambda\leqslant v(x)} \sum_{c_{10}\lambda\leqslant j\leqslant\lambda-1} \|(a_j-1)\alpha\|^2\Big), \tag{76}$$

estimation qui, à la valeur près de l'exposant d_{10}, généralise la proposition 2.1 de [8], qui est une forme effective du théorème 1 de [27]. Examinons à présent un exemple où ce théorème est inopérant.

Exemple 8. Lorsque $a_0 = 2$ et $a_n = 3$ pour $n \geqslant 1$ et $\alpha = 1/2$, la majoration (76) est triviale. La majoration (55) n'est pas en cause, comme on peut le constater en calculant directement la transformée de Fourier F_λ de la fonction $f(n) = \mathrm{e}(\alpha s_A(n))$ définie pour $(\alpha,t) \in \mathbb{R}^2$ par

$$F_\lambda(\alpha,t) = \frac{1}{q_\lambda}\sum_{u<q_\lambda} \mathrm{e}(\alpha s_A(u))\,\mathrm{e}\Big(-\frac{tu}{q_\lambda}\Big).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

En effet, pour tout $(\alpha,t)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$|F_\lambda(\alpha,t)| = \frac{1}{2}\varphi_2\left(\alpha-\frac{t}{2\cdot 3^{\lambda-1}}\right)\frac{1}{3^{\lambda-1}}\prod_{j=1}^{\lambda-1}\varphi_3\left(\alpha-\frac{t}{3^{\lambda-j}}\right),$$

où φ_2 et φ_3 sont définies par (28). Alors, pour $\alpha=1/2$,

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},t\right)\right| = \left|\frac{1}{2\cdot 3^{\lambda-1}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi t}{3^{\lambda-1}}}{\cos\frac{\pi t}{2\cdot 3^{\lambda-1}}}\cdot\frac{\cos(\pi t)}{\cos\frac{\pi t}{3}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi t}{3}}{\cos\frac{\pi t}{3^2}}\cdots\frac{\cos\frac{\pi t}{3^{\lambda-2}}}{\cos\frac{\pi t}{3^{\lambda-1}}}\right|$$

d'où, en écrivant $\sin\frac{\pi t}{3^{\lambda-1}} = 2\sin\frac{\pi t}{2\cdot 3^{\lambda-1}}\cos\frac{\pi t}{2\cdot 3^{\lambda-1}}$ et en simplifiant le produit télescopique,

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},t\right)\right| = \left|\frac{1}{3^{\lambda-1}}\frac{\sin\frac{\pi t}{2\cdot 3^{\lambda-1}}}{\cos\frac{\pi t}{3^{\lambda-1}}}\cos(\pi t)\right|.$$

On constate que pour $t=\frac{3^{\lambda-1}+1}{2}$, on a

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{3^{\lambda-1}+1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{3^{\lambda-1}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4\cdot 3^{\lambda-1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\cdot 3^{\lambda-1}}\right)}\right| = \left|\frac{1}{3^{\lambda-1}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4\cdot 3^{\lambda-1}}\right)}{\sin\frac{\pi}{2\cdot 3^{\lambda-1}}}\right|,$$

d'où

$$|F_\lambda(1/2,t)| \to_{\lambda\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Pourtant, la suite $\left(s_A(p)\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques modulo 2. En effet, dans la base considérée, pour $p\geqslant 3$ premier, on a

$$p = 1+2n_1+2\cdot 3n_2+2\cdot 3^2 n_3+\ldots$$

et

$$s_A(p) = 1+n_1+n_2+n_3+\ldots.$$

On remarque que

$$\frac{p-1}{2} = n_1+3n_2+3^2n_3+\ldots \equiv n_1+n_2+n_3+\ldots \equiv s^{(A)}(p)-1 \bmod 2.$$

On a alors les équivalences

$$s_A(p)\text{ impair } \Leftrightarrow \frac{p-1}{2}\text{ pair } \Leftrightarrow p\equiv 1 \bmod 4$$

et le théorème de Dirichlet garantit ainsi que $\left(s_A(p)\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques modulo 2.

Le phénomène décrit à l'exemple 8 peut être généralisé:

Exemple 9. Lorsque a_0 est quelconque et, pour $n\geqslant 1$, $a_n=q$ impair, on a pour tout $(\alpha,t)\in\mathbb{R}^2$,

$$|F_\lambda(\alpha,t)| = \frac{1}{a_0}\varphi_{a_0}\left(\alpha-\frac{t}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}\right)\frac{1}{q^{\lambda-1}}\prod_{j=1}^{\lambda-1}\varphi_q\left(\alpha-\frac{t}{q^{\lambda-j}}\right)$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

où φ_{a_0} et φ_q sont définies par (28). Pour $\alpha = 1/2$, en utilisant le fait que q est impair,

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},t\right)\right| = \left|\frac{1}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi a_0}{2}+\frac{\pi t}{q^{\lambda-1}}\right)}{\cos\frac{\pi t}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}}\cdot\frac{\cos(\pi t)}{\cos\frac{\pi t}{q}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi t}{q}}{\cos\frac{\pi t}{q^2}}\cdots\frac{\cos\frac{\pi t}{q^{\lambda-2}}}{\cos\frac{\pi t}{q^{\lambda-1}}}\right|$$

d'où, en simplifiant le produit télescopique,

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},t\right)\right| = \left|\frac{1}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi a_0}{2}+\frac{\pi t}{q^{\lambda-1}}\right)}{\cos\frac{\pi t}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}}\cdot\frac{\cos(\pi t)}{\cos\frac{\pi t}{q^{\lambda-1}}}\right|.$$

On constate que pour $t = \frac{q^{\lambda-1}+1}{2}$, on a

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{q^{\lambda-1}+1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi a_0}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\cdot q^{\lambda-1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2\,a_0}+\frac{\pi}{2\,a_0\cdot q^{\lambda-1}}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\pi\frac{q^{\lambda-1}+1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\,q^{\lambda-1}}\right)}\right|,$$

donc

$$\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{q^{\lambda-1}+1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{a_0\cdot q^{\lambda-1}}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi a_0}{2}+\frac{\pi}{2\cdot q^{\lambda-1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2\,a_0}+\frac{\pi}{2\,a_0\cdot q^{\lambda-1}}\right)}\cdot\frac{\cos\pi\frac{q+1}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2\,q^{\lambda-1}}\right)}\right|.$$

Ainsi,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{q^{\lambda-1}+1}{2}\right)\right| = \frac{2}{\pi a_0}\left|\frac{\cos\frac{\pi a_0}{2}}{\cos\frac{\pi}{2\,a_0}}\right|.$$

Pour a_0 pair et q impair, nous obtenons

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|F_\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{q^{\lambda-1}+1}{2}\right)\right| \neq 0.$$

Pourtant, dans ces conditions, on peut montrer que la suite $\left(s^{(A)}(p)\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques modulo 2. En effet, pour $p\geqslant 3$ premier, on peut écrire

$$p = n_0 + a_0\,n_1 + a_0\cdot q\,n_2 + a_0\cdot q^2\,n_3 + \ldots$$

avec $\mathrm{pgcd}(n_0,a_0) = 1$ et

$$s_A(p) = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \ldots.$$

On remarque que

$$\frac{p-n_0}{a_0} = n_1 + qn_2 + q^2n_3 + \ldots \equiv n_1 + n_2 + n_3 + \ldots. \equiv s^{(A)}(p) - n_0 \bmod 2$$

Pour $r\in\{0,1\}$, on a alors les équivalences

$$s_A(p)\equiv r \bmod 2 \Leftrightarrow \frac{p-n_0}{a_0} \equiv r + n_0 \bmod 2 \Leftrightarrow p \equiv a_0 r + (a_0+1)n_0 \bmod 2a_0.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Comme a_0 est pair et $\operatorname{pgcd}(n_0,a_0)=1$, a_0+1 et n_0 sont impairs et l'on peut en déduire que $\operatorname{pgcd}((a_0+1)n_0,2a_0)=1$. De plus, $a_0+(a_0+1)n_0$ est aussi impair, donc si p' est un nombre premier qui divise $\operatorname{pgcd}(a_0+(a_0+1)n_0,2a_0)$, alors p' est impair, p' divise a_0 et, finalement, p' divise $(a_0+1)n_0$, ce qui est impossible.

Par conséquent,

$$\operatorname{pgcd}((a_0+1)n_0,2a_0)=\operatorname{pgcd}(a_0+(a_0+1)n_0,2a_0)=1.$$

Lorsque n_0 parcourt toutes les valeurs telles que $0\leqslant n_0<a_0$ et $\operatorname{pgcd}(n_0,a_0)=1$, les classes $(a_0+1)n_0$ et $a_0+(a_0+1)n_0$ forment une partition de l'ensemble des classes inversibles modulo $2a_0$. En effet, si $(a_0+1)n_0\equiv a_0+(a_0+1)n_0' \bmod 2a_0$ alors $n_0\equiv n_0' \bmod a_0$ et, donc, $n_0=n_0'$, d'où $a_0\equiv 0 \bmod 2a_0$, ce qui est impossible.

Finalement, dans les deux cas $r=0$ et $r=1$, le théorème de Dirichlet garantit que $\left(s^{(A)}(p)\right)_{p\in\mathcal{P}}$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques modulo $2a_0$.

12. Répartition de la somme des chiffres en base de Cantor

L'équirépartition modulaire modulo m de la fonction somme de chiffres s_A dans une base de Cantor quelconque a été établie par Hoit [16] lorsque m est premier. N'en n'ayant pas trouvé dans la littérature, nous donnons ici une démonstration du cas général où $m\geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned} p_{\ell,m}(N) &:= \operatorname{card}\left\{n<N\,;\, s^{(A)}(n)\equiv \ell \mod m\right\}\\ &= \sum_{\substack{n<N\\ s^{(A)}(n)\equiv\ell (\mathrm{mod}\ m)}} 1 = \sum_{n<N}\frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1}\mathrm{e}\left(\frac{r}{m}\left(s^{(A)}(n)-\ell\right)\right).\end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$p_{\ell,m}(N)-\frac{N}{m}=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m-1}\mathrm{e}\left(-\frac{r\ell}{m}\right)\sum_{n<N}\underbrace{\mathrm{e}\left(\frac{rs^{(A)}(n)}{m}\right)}_{g_r(n)}=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m-1}\mathrm{e}\left(-\frac{r\ell}{m}\right)S_r(N), \tag{77}$$

avec la notation sommatoire du lemme 10, S_r étant la fonction sommatoire de la fonction g_r. Pour utiliser le lemme 10, la partie délicate consiste à majorer $S_r(q_\lambda)$.

$$S_r(q_\lambda)=\sum_{n<q_\lambda}\mathrm{e}\left(\frac{rs^{(A)}(n)}{m}\right)=\prod_{0\leqslant j<\lambda}\sum_{0\leqslant t<a_j}\mathrm{e}\left(\frac{rt}{m}\right)=\prod_{0\leqslant j<\lambda}\varphi_{a_j}\left(\frac{r}{m}\right). \tag{78}$$

À $r=r_0$ fixé, s'il existe $0\leqslant j\leqslant\lambda-1$ tel que $m\mid r_0a_j$, alors $\varphi_{a_j}\left(\frac{r_0}{m}\right)=0$ et le produit ci-dessus est nul. Si ce n'est pas le cas, le lemme 13 donne

$$\varphi_{a_j}\left(\frac{r}{m}\right)=\varphi_{a_j}\left(\frac{a_j\frac{r}{m}}{a_j}\right)\leqslant\varphi_{a_j}\left(\frac{\left\|a_j\frac{r}{m}\right\|}{a_j}\right).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Alors,

$$\frac{1}{ma_j} \leqslant \frac{\left\|a_j \frac{r}{m}\right\|}{a_j} \leqslant \frac{1}{2a_j} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{79}$$

d'où

$$\left\| \frac{\left\|a_j \frac{r}{m}\right\|}{a_j} \right\| = \frac{\left\|a_j \frac{r}{m}\right\|}{a_j} \leqslant \frac{1}{2a_j}.$$

Cette majoration permet d'appliquer le lemme 11, qui donne

$$\frac{1}{a_j}\varphi_{a_j}\left(\frac{r}{m}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{a_j^2}\right)\pi^2 \left\|a_j \frac{r}{m}\right\|^2\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\pi^2}{8m^2}\right)$$

à partir de (79) et de la minoration $a_j \geqslant 2$. Finalement,

$$\begin{aligned}\left|p_{\ell,m}(q_\lambda) - \frac{q_\lambda}{m}\right| &\leqslant \frac{1}{m}\left|\sum_{r=1}^{m-1} \mathrm{e}\left(-\frac{r\ell}{m}\right) S_r(q_\lambda)\right| \leqslant \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m-1} |S_r(q_\lambda)| \\ &\leqslant \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m-1} \prod_{0\leqslant j<\lambda} a_j \exp\left(-\frac{\pi^2}{8m^2}\right) = \frac{(m-1)q_\lambda}{m}\exp\left(-\frac{\pi^2\lambda}{8m^2}\right).\end{aligned}$$

Soit maintenant $N = \sum_{j=0}^{v(N)-1} \varepsilon_j(N) q_j$. Soit $(r_N)_N$ une suite d'entiers telle que $\lim r_N = +\infty$ et $\lim v(N) - r_N = +\infty$. Injectées dans (77), l'inégalité triangulaire et la majoration (30) donnent

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_{\ell,m}(N)}{N} - \frac{1}{m}\right| &\leqslant \frac{1}{mN}\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{0\leqslant\lambda<v(N)} \varepsilon_\lambda(N) |S_r(q_\lambda)| \leqslant \frac{m-1}{mN}\sum_{0\leqslant\lambda<v(N)} \varepsilon_\lambda(N) q_\lambda \exp\left(-\frac{\pi^2\lambda}{8m^2}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{0\leqslant\lambda<v(N)-r_N} \varepsilon_\lambda(N) q_\lambda + \frac{1}{N}\exp\left(-\frac{\pi^2(v(N)-r_N)}{8m^2}\right)\sum_{v(N)-r_N\leqslant\lambda<v(N)} \varepsilon_\lambda(N) q_\lambda \\ &\leqslant \frac{q_{v(N)-r_N}}{N} + \exp\left(-\frac{\pi^2(v(N)-r_N)}{8m^2}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned} \tag{80}$$

On obtient ainsi, à m fixé, une majoration uniforme en ℓ. Dans le cas de la base factorielle, prenons pour r_N l'entier le plus proche de $\frac{\log N}{(\log\log N)^2}$. Le développement asymptotique (10) donne alors

$$\delta_N = v(N) - r_N = \frac{\log N}{\log\log N}\left[1 + \frac{\log\log\log N}{\log\log N} + o\left(\frac{1}{\log\log N}\right)\right].$$

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

Étudions alors l'ordre de grandeur de la majoration (80).

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{q_{\delta_N}}{N}\Big) &= \delta_N\log\delta_N-\delta_N-\log N+O(\log\delta_N)\\ &= \frac{\log N}{\log\log N}\Big(1+\frac{\log\log\log N}{\log\log N}+o\Big(\frac{1}{\log\log N}\Big)\Big)\\ &\qquad\qquad \Big(\log\log N-\log\log\log N-1+o(1)\Big)-\log N+O(\log\log N)\\ &= -\frac{\log N}{\log\log N}\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

Finalement, pour $N\geqslant 10$ et $m\geqslant 2$, on obtient

$$p_{\ell,m}(N)=\frac{N}{m}+O\Big(N\exp\Big(-\frac{\pi^2}{16m^2}\frac{\log N}{\log\log N}\Big)\Big),$$

où la constante implicite est absolue.

Competing interest. There is no competing interest.

Data availability statement. No data are associated with this article.

Références

[1] G. Barat et P. J. Grabner, Distribution properties of G-additive functions, *J. Number Theory* **60**,1 (1996), 103–123.

[2] R. Bellman et H. N. Shapiro, On a problem in additive number theory, *Ann. of Math. (2)* **49** (1948), 333–340.

[3] J. Coquet, Sur les fonctions S-multiplicatives et S-additives. Thèse de doctorat de Troisième Cycle. Orsay, 1975.

[4] H. Davenport, *Multiplicative number theory, Graduate Texts in Mathematics* vol. 74, Springer-Verlag, New York, éd. third, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[5] H. Delange, Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres", *Enseignement Math. (2)* **21**,1 (1975), 31–47.

[6] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 1, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1932.

[7] M. Drmota et P. J. Grabner, Analysis of digital functions and applications, in *Combinatorics, automata and number theory*, pp. 452–504, *Encyclopedia Math. Appl.* vol. 135, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[8] M. Drmota, C. Mauduit et J. Rivat, Primes with an average sum of digits, *Compos. Math.* **145**,2 (2009), 271–292.

[9] M. Drmota, C. Müllner et L. Spiegelhofer, Primes as sums of Fibonacci numbers, *Memoirs Amer. Math. Soc.* Forthcoming.

[10] M. Drmota et J. Verwee, Effective Erdős-Wintner theorems for digital expansions, *J. Number Theory* **229** (2021), 218–260.

[11] P. Erdős, S. W. Graham, A. Ivić et C. Pomerance, On the number of divisors of $n!$, in *Analytic number theory, Vol. 1 (Allerton Park, IL, 1995)*, pp. 337–355, *Progr. Math.* vol. 138, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[12] A. S. Fraenkel, Systems of numeration, *Amer. Math. Monthly* **92**,2 (1985), 105–114.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press

[13] A. O. Gelfond, Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arith.* **13** (1967/1968), 259–265.

[14] P. J. Grabner, Completely q-multiplicative functions: the Mellin transform approach, *Acta Arith.* **65**,1 (1993), 85–96.

[15] R. Hofer, F. Pillichshammer et G. Pirsic, Distribution properties of sequences generated by Q-additive functions with respect to Cantor representation of integers, *Acta Arith.* **138**,2 (2009), 179–200.

[16] A. Hoit, The distribution of generalized sum-of-digits functions in residue classes, *J. Number Theory* **79**,2 (1999), 194–216.

[17] A. Hoit, The distribution of real-valued Q-additive functions modulo 1, *Acta Arith.* **100**,2 (2001), 117–133.

[18] H. Iwaniec et E. Kowalski, *Analytic number theory, American Mathematical Society Colloquium Publications* vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[19] P. Kirschenhofer et R. F. Tichy, On the distribution of digits in Cantor representations of integers, *J. Number Theory* **18**,1 (1984), 121–134.

[20] D. E. Knuth, *The art of computer programming. Vol. 2*, Addison-Wesley, Reading, MA, éd. third, 1998. Seminumerical algorithms.

[21] L. Kuipers et H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.

[22] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications* vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski, With a preface by Berstel and Perrin.

[23] E. Manstavičius, Probabilistic theory of additive functions related to systems of numeration, in *New trends in probability and statistics, Vol. 4 (Palanga, 1996)*, pp. 413–429, VSP, Utrecht, 1997.

[24] B. Martin, C. Mauduit et J. Rivat, Théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales, *Acta Arith.* **165**,1 (2014), 11–45.

[25] B. Martin, C. Mauduit et J. Rivat, Fonctions digitales le long des nombres premiers, *Acta Arith.* **170**,2 (2015), 175–197.

[26] C. Mauduit et J. Rivat, La somme des chiffres des carrés, *Acta Math.* **203**,1 (2009), 107–148.

[27] C. Mauduit et J. Rivat, Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers, *Ann. of Math. (2)* **171**,3 (2010), 1591–1646.

[28] C. Mauduit et J. Rivat, Prime numbers along Rudin-Shapiro sequences, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17**,10 (2015), 2595–2642.

https://doi.org/10.1017/S1474748025000106 Published online by Cambridge University Press